UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Soluções analíticas e numéricas de equações não lineares com auxílio de recursos computacionais

Diego Alves Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Diego Alves Silva

Soluções analíticas e numéricas de equações não lineares com auxílio de recursos computacionais

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

USP – São Carlos
Fevereiro de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

S586s

Silva, Diego A.
Soluções analíticas e numéricas de equações não lineares com auxílio de recursos computacionais / Diego A. Silva; orientadora Vanessa Rolnik. -- São Carlos, 2018.
100 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2018.

1. Equações não lineares. 2. Zeros de funções . 3. Métodos numéricos. 4. Recursos computacionais.. 5. Maxima. I. Rolnik, Vanessa, orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Diego Alves Silva

Analytical and numerical solutions of nonlinear equations using computational resources

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Vanessa Rolnik Artioli

USP – São Carlos
February 2018

Este trabalho é dedicado à minha vó Flausina (in memoriam) que me apoiou e sempre buscou me fornecer palavras de ajuda nos momentos mais complicados. Se ainda hoje estivesse aqui entre nós, com toda certeza ficaria muito contente em ver este projeto finalizado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus e aos meus pais Antônio Gomes da Silva e Ivone Maria Alves Silva, que muito me apoiaram durante todo meus estudos. Agradeço à Capes que me auxiliou com a bolsa de estudos para que eu pudesse ter um tempo extra para me dedicar aos meus estudos. Agradeço à vice-diretora da escola onde leciono, que me ajudou a organizar meus horários de modo que eu pudesse realizar este sonho. Agradeço a todos meus colegas de turma que me aguentaram durante todos esses anos, mas em especial à Rosa Oficiati que me deu suporte em vários momentos, principalmente aqueles em que eu pensei em desistir e por quem eu tenho um carinho muito especial; e à Daniele Bonfim, que me ajudou a solucionar vários obstáculos. Agradeço aos meus familiares e em especial minha tia Maria Silva, que sempre me apoiou e deu forças. Por fim, agradeço ao IMPA, que teve a iniciativa de proporcionar o PROFMAT, à USP e à minha orientadora Vanessa Rolnik Artioli que me ajudou muito durante essa caminhada em busca de meu objetivo.

“Tem muita gente piruá nesse planeta. Gente que não reage ao calor, que não desabrocha. Fica ali, duro, triste e inútil pro resto da vida. Não cumpre sua sina de revelar-se, de transformar-se em algo melhor. Não vira pipoca, mantém-se piruá. E um piruá emburrado, que reclama que nada lhe acontece de bom. Pois é. Perdeu a chance de entregar-se ao fogo, tentou se preservar, danou-se. O importante na vida é reagir às emoções, e não manter-se frio, fechado, feito um grão que não honrou seu destino.”

(Martha Medeiros)

RESUMO

SILVA, DIEGO A. **Soluções analíticas e numéricas de equações não lineares com auxílio de recursos computacionais**. 2018. 100 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar técnicas de solução para equações não lineares. Especificamente, consideramos equações compostas por funções elementares, dentre elas polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, e por operações algébricas de soma, subtração, multiplicação, divisão, potência e raiz. Exploramos técnicas de resolução analítica e numérica. Como não existem fórmulas resolventes de extensão geral, a técnica analítica consiste em aplicar operações elementares que nos levam a equações equivalentes (que têm a mesma solução) até que se consiga uma equação simples, de fácil resolução. Os métodos numéricos abrangem um conjunto maior de equações e obtêm uma aproximação para a solução por meio de um processo que gera uma sequência de aproximações. Entre os métodos numéricos estudados estão Bissecção, de Newton, das Secantes e do Ponto Fixo (ou Iteração Linear). Recursos Computacionais como calculadora, planilha eletrônica e o software Maxima foram utilizados com objetivo de automatizar os cálculos, tornando essa tarefa mais rápida, e também buscando extrair informações adicionais do processo de resolução como criar tabelas e traçar gráficos. Realizamos testes numéricos com equações de diversos graus de dificuldade. Observamos as vantagens, as desvantagens e as limitações de cada método e de cada recurso.

Palavras-chave: Equações não lineares, Zeros de funções, Métodos numéricos, Recursos computacionais, Maxima.

ABSTRACT

SILVA, DIEGO A. **Analytical and numerical solutions of nonlinear equations using computational resources**. 2018. 100 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2018.

The goal of this work is to present solution techniques for nonlinear equations. Specifically, we consider equations compounded of elementary functions, among them polynomials, rational,trigonometric, exponential and logarithmic, and of algebraic operations of addition, subtraction, multiplication, division, power and root. We explore analytical and numerical resolution techniques. Since there are no general resolvent formulas, the analytic technique consists of applying elementary operations that lead to equivalent equations (which have the same solution) until a simple and easily to solve equation is obtained. Numerical methods cover a larger set of equations and obtain an approximation to the solution by a process which generates a sequence of approximations. Among the numerical methods we studied Bisection, Newton, Secant and Fixed Point (or Linear Iteration) methods. Computational resources such as calculator, spreadsheet and the software Maxima were used in order to automate calculations, making this task faster, as well as seeking for additional information from the resolution process, such as creating tables and graphics. We perform numerical tests, with equations of varying degrees of difficulty. We note the advantages, disadvantages and limitations of each method and resource.

Keywords: Nonlinear equations, Zero of functions, Numerical methods, Computational resources, Maxima.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

O trabalho trata de resolução de equações não lineares com uma incógnita real x da forma

$$g(x) = h(x), \tag{1.1}$$

em que os termos g e h são compostos por funções elementares, dentre elas polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, e por operações algébricas de soma, subtração, multiplicação, divisão, potência e raiz.

Por exemplo, $x^5 - 6x^3 + 2x + 9 = 0$, $e^{-x} = \text{sen}\, \pi x/2$ e $x^3 = \ln x$ são equações não lineares. Por outro lado, equações do tipo $a + bx = 0$ com a e b números constantes, são lineares.

Resolver uma equação é encontrar todos os valores possíveis para a incógnita, em um dado conjunto numérico (neste trabalho, o conjunto dos números reais), que tornam a igualdade (1.1) verdadeira.

Equações polinomiais até grau quatro possuem fórmulas resolventes em termos de seus radicais (Bhaskara, Cardano e Ferari - (HEFEZ; VILLELA, 2012)), mas em geral, as equações não lineares não possuem fórmulas resolventes. Elas podem ser resolvidas de maneira analítica, por meio de operações elementares que nos levam a equações equivalentes (que têm a mesma solução) até que se consiga uma equação simples, de fácil resolução. As soluções obtidas por técnicas analíticas são exatas, a menos de erros de arredondamento nas contas com os números reais.

No entanto, as técnicas analíticas dependem dos termos que compõem a equação. Para a maioria dos casos, a solução é difícil, quando não impossível. Imagine como poderíamos resolver a equação

$$e^x + \ln(\text{sen}(x)) = 0. \tag{1.2}$$

Pois é, complicado, não?

Para tais casos, é recomendada a resolução por métodos numéricos. Os métodos numéricos encontram soluções aproximadas tão próximas da exata quanto se queira. Eles, em geral, partem de uma aproximação inicial ou intervalo inicial contendo a solução e, por meio de refinamentos sucessivos, geram uma sequência de aproximações para a solução. Esta sequência converge para a solução, dependendo de algumas condições, e o processo é finalizado quando a precisão desejada for atingida. Entre os métodos estudados estão os métodos da Bissecção, de Newton, das Secantes e do Ponto Fixo (ou Iteração Linear).

Assim, o objetivo deste trabalho é estudar métodos de resolução para equações não lineares, incluindo analíticos e numéricos, explorando exemplos desde os mais simples até os mais complicados.

A motivação para este trabalho surgiu da constatação da dificuldade de resolver certas equações e da utilidade das equações em aplicações das mais diversas áreas. Cientistas, professores e estudantes das áreas de exatas estão sempre se deparando com problemas que podem ser expressos por meio de equações e buscando encontrar suas soluções. Também nos motivaram as atividades apresentadas no livro “Recursos Computacionais no Ensino de matemática” da Coleção Profmat (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2013), de onde tiramos a ideia de usar a calculadora, a planilha eletrônica e o software WxMaxima, para automatizar os cálculos, tornando essa tarefa mais rápida, mas também buscando tirar mais informações, como criar tabelas com as soluções, traçar os gráficos das funções, comparar gráficos de decaimento do erro entre os métodos, entre outras que serão vistas.

Realizamos testes numéricos com equações de diversos graus de dificuldade, utilizando métodos numéricos e recursos computacionais. Observamos as vantagens, as desvantagens e as limitações de cada método e de cada recurso, ao resolver equações não lineares.

O texto está dividido da seguinte forma. O Capítulo 2 traz um estudo prévio das funções elementares (polinomiais, trigonométricas, exponencial e logarítmica), de suas características como domínio, imagem, crescimento e comportamento do gráfico. Introduzimos o conceito de zeros de funções e o estudamos para as funções elementares. No Capítulo 3 estudamos os métodos analíticos para resolver equações. Inicialmente, exploramos técnicas para cada tipo de equação separadamente e, na última seção, resolvemos analiticamente algumas equações compostas por mais de um tipo. No Capítulo 4 estudamos os métodos numéricos para solução de equações. Propusemos exemplos mais elaborados para os quais a solução analítica se mostrou difícil. Por fim, no Capítulo 5, utilizamos os recursos computacionais.

CAPÍTULO

2

FUNÇÕES ELEMENTARES

Neste capítulo apresentamos uma breve revisão das funções elementares do Cálculo. É a base matemática para o estudo da resolução das equações dos Capítulos 3 e 4, uma vez que olhar para os termos das equações como sendo funções nos auxilia na sua resolução. Dividimos a revisão em funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Para cada uma delas, comentamos as principais características como domínio, imagem, crescimento e gráfico. Também introduzimos o conceito de zeros de funções, isto é, os valores reais x^* que anulam a função, de modo que $f(x^*) = 0$.

2.1 Conceitos matemáticos preliminares

Apresentamos aqui alguns conceitos matemáticos que são utilizados ao longo do texto. Foram retirados de (THOMAS *et al.*, 2002).

Definição 1. Uma *função* f de um conjunto A para um conjunto B é uma regra que associa um único elemento $y \in B$ a cada elemento $x \in A$.

Escrevemos $f : A \to B$, definida por $y = f(x)$.

Nesta definição, A é o *domínio* da função e B é chamado de *contradomínio*. O conjunto contido em B de todos os elementos que estão associados aos elementos de A é chamado *imagem* da função e denotado por Im_f.

Definição 2. Os pontos (x, y) no plano cujas coordenadas são pares ordenados onde $y = f(x)$ formam o *gráfico* da função.

Uma função é crescente quando, aumentando-se os valores atribuídos ao domínio, os valores do contradomínio ficam cada vez maiores; caso contrário, a função é decrescente. Seguem definições.

Definição 3. Seja f uma função definida em um intervalo I. Então f é *crescente* em I se, para todos os pontos x_1 e x_2 em I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, ou seja, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0$; e f é *decrescente* em I se, para todos os pontos x_1 e x_2 em I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, ou seja, $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$.

Na prática, isso quer dizer que para uma função crescente, dados dois elementos, a medida que aumentarmos o valor atribuído de x, aumentaremos seu correspondente em y. Por outro lado, para uma função decrescente, dado dois elementos no conjunto tomado, à medida que aumentarmos o valor atribuído para x, seu correspondente em y terá uma imagem menor, ou seja, diminuirá.

Exemplo 1. A função $f(x) = 2x+1$ é crescente em $\mathbb{R}$, pois $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1+1 < 2x_2+1$ $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Veja Figura 1 (a).

Exemplo 2. A função $f(x) = -2x+1$ é decrescente em $\mathbb{R}$, pois $x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1+1 > -2x_2+1$ $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Veja Figura 1 (b).

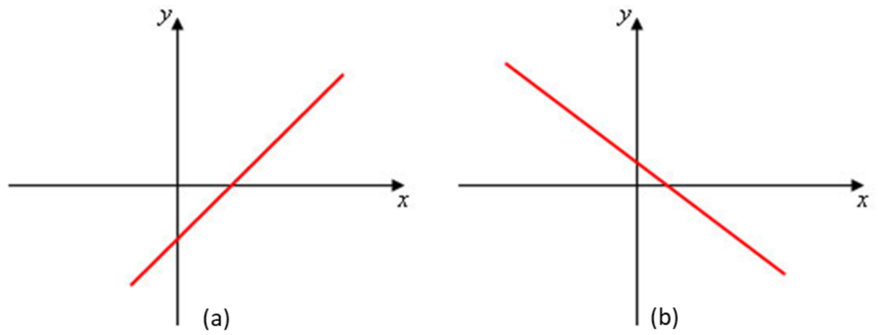


Figura 1 – (a) Exemplo de função crescente no conjunto $\mathbb{R}$ e (b) exemplo de função decrescente no conjunto $\mathbb{R}$.

Exemplo 3. Uma função pode ainda ser crescente em um intervalo de seu domínio e decrescente em outro. Na Figura 2, a função $f(x) = x^3+3x^2-1$ é crescente de $]\infty, -2[\cup]0, \infty[$ e decrescente de $]-2, 0[$.

Definição 4. $f : A \to B$ Seja uma **função injetora** com domínio **A** e imagem **B**. A função inversa f^{-1} é a função $f^{-1} : B \to A$, com domínio B e imagem A tal que:

$$f^{-1}(f(a)) = a \text{ para } a \in A \text{ e } f^{-1}(f(b)) = b \text{ para } b \in B.$$

Assim, podemos definir a função inversa f^{-1} por

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

para todo y em B.

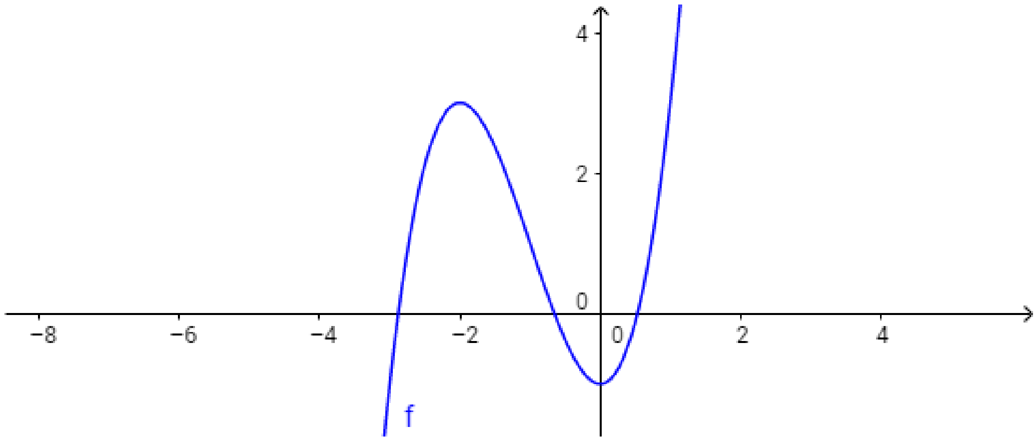


Figura 2 – Exemplo de função crescente em um intervalo e decrescente em outro.

De uma maneira bem simples, podemos dizer que a inversa de uma função f, denotada por f^{-1}, é a função que desfaz a operação executada pela função f.

Definição 5. A *derivada* de uma função $f(x)$ em relação à variável x é a função f' cujo valor em x é

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \tag{2.1}$$

desde que o limite exista.

A definição de derivada não é fácil de aplicar diretamente, mas para as funções elementares tratadas neste capítulo, existem regras de derivação muito simples. Elas serão fornecidas ao longo do capítulo. Seguem outras duas regras bastante úteis:

- Regra da multiplicação por constante: se g for uma função derivável em x e c uma constante, então

$$(c\,g)'(x) = c\,g'(x); \tag{2.2}$$

Demonstração. Considere $f(x) = c\cdot g(x)$, onde $g(x)$ é uma função derivável e $c \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = [c\cdot g]'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{c\cdot g(x+h) - c\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} c\cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= c\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= c \cdot g'(x)$$

□

- Regra da soma: se f e g forem funções deriváveis de x então a soma das duas $f+g$ é derivável em qualquer ponto onde ambas são deriváveis. Nesses pontos,

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x). \tag{2.3}$$

Demonstração.

$$(f+g)'(x) = \left[\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

□

Um resultado bastante útil para esboçar gráficos, por exemplo, é o Teste da Primeira Derivada, a seguir.

Corolário 1. Suponha que f seja contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f' > 0$ em todos os pontos de $]a,b[$ então f é crescente em $[a,b]$ e se $f' < 0$ em todos os pontos de $]a,b[$ então f é decrescente em $[a,b]$.

Para estudar as funções trigonométricas, precisamos da definição de periodicidade.

Definição 6. Uma função $f(x)$ é *periódica* se existir um número positivo p tal que $f(x+p) = f(x)$ para qualquer valor de x. O menor valor possível de p é o *período* de f.

Finalmente, vamos definir zero de função.

Definição 7. Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função dada. Um ponto $x^* \in A$ é um *zero* de f se $f(x^*) = 0$.

Em outras palavras, os zeros de uma função correspondem às raízes da equação $f(x) = 0$. Graficamente, correspondem aos pontos onde o gráfico corta ou toca o eixo x.

Por exemplo, na Figura 1 (a), o ponto em que o gráfico cruza o eixo x é $x^* = -\frac{1}{2}$. De fato, $f(-\frac{1}{2}) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$. Na Figura 1 (b), o ponto em que o gráfico cruza o eixo x é $x^* = \frac{1}{2}$. De fato, $f(\frac{1}{2}) = -2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$.

Já para a Figura 2, vemos que o gráfico cruza o eixo x três vezes, uma vez no intervalo $]-4,-2[$, outra em $]-2,0[$ e, por último, em $]0,2[$. Nos capítulos seguintes vamos ver como calcular esses zeros, exatamente ou aproximadamente.

2.2 Funções polinomiais

Seja a função polinomial de grau n, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{2.4}$$

com n um número inteiro não negativo e os coeficientes reais $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $a_n \neq 0$.

Para $n = 1$, temos as *funções afins*. Alguns exemplos de função afim são

a) $f(x) = 2x + 1$;

b) $f(x) = -x + 4$;

c) $f(x) = -x$.

A presença de conteúdos matemáticos pode ser percebida diariamente em nosso cotidiano. Se o quilo do pãozinho custa em uma determinada padaria $R\$5,00$, então, quanto maior a quantidade de pães comprados, maior será o valor a pagar. O valor a ser pago será diretamente proporcional ao peso de pães comprados. Comprando $2kg$ desse pão na mesma padaria se pagará $R\$10,00$, por $3kg$ se pagará $R\$15,00$ e assim sucessivamente. O modelo matemático que expressa o valor a ser pago em função do quilo de pão é descrito por $f(x) = 5x$.

Há inúmeros outros modelos descritos por funções afins, em praticamente todas as áreas de conhecimento.

A função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, o coeficiente angular a for positivo, e é decrescente se, e somente se, o coeficiente angular a for negativo.

De fato, f crescente $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow a > 0;$$

e f decrescente $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow a < 0.$$

O gráfico de uma função afim é uma reta.

Exemplo 4. Construa o gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

Quando $x = 0$, temos o par ordenado $(0, 1)$ e igualando $f(x)$ a zero, descobrimos um segundo ponto $(-\frac{1}{2}, 0)$. Marcando esses dois pontos no plano, os ligamos por meio de uma reta obtendo o gráfico exibido na Figura 3. Observamos também que $x^* = -\frac{1}{2}$ é o único ponto que anula a f, logo este é o único zero dessa função.

De maneira geral, para determinar o zero de uma função afim, fazemos $f(x) = ax + b = 0$ e então o único zero da função é

$$x = -\frac{b}{a}. \tag{2.5}$$

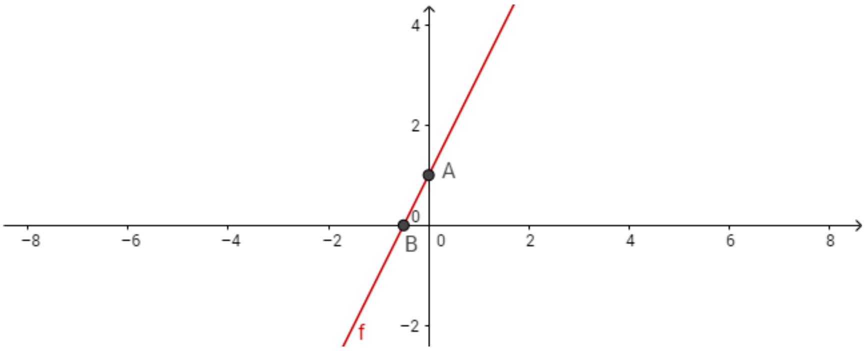


Figura 3 – Gráfico da função $f(x) = 2x+1$ e o zero da f, $x^* = -\frac{1}{2}$.

Quando $n = 2$, a função (2.4) recebe o nome de *função quadrática*. Alguns exemplos de funções quadráticas

a) $f(x) = x^2 + 3x - 2$;

b) $f(x) = 2x^2$;

c) $f(x) = -x^2 + 4$.

É chamado de queda livre o movimento na direção vertical que os corpos, soltos a partir do repouso, sofrem pela ação da gravidade, desprezando-se a resistência do ar. Um paraquedista, conhecendo seu tempo de queda livre, do momento em que salta da aeronave até o momento em que abre o paraquedas, pode determinar a distância que percorreu por meio de uma função. A distância percorrida S (em metro) pelo paraquedista em queda livre, depois de um intervalo de tempo t (medido em segundo a partir do zero), pode ser modelada pela função $S(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$. A constante g corresponde à aceleração da gravidade, que, nas proximidades da superfície da Terra, vale aproximadamente $9,8m/s^2$. Assim, $S(t) = 4,9t^2$ (BARROSO, 2010).

O gráfico da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \tag{2.6}$$

é uma parábola, cuja concavidade é definida pelo valor de a. Caso $a > 0$, a concavidade do gráfico é voltada para cima e, caso $a < 0$, a concavidade é voltada para baixo. Com isso, observamos que as funções quadráticas são crescentes em um determinado intervalo e decrescente em outros. O que delimita o intervalo de crescimento e o de decrescimento é o vértice, que é calculado da segundo a Equação 2.7

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$0 = 2ax + b$

$$x_v = -\frac{b}{2a}. \tag{2.7}$$

A altura máxima ou mínima atingida pela função é dada por

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac \tag{2.8}$$

Se $a > 0$, a função decresce em $]-\infty, x_v[$ e cresce em $]x_v, +\infty[$, o ponto (x_v, y_v) é o ponto em que a função atinge seu valor mínimo; se $a < 0$, a função cresce em $]-\infty, x_v[$ e decresce em $]x_v, +\infty[$, o ponto (x_v, y_v) é o ponto em que a função atinge seu valor máximo.

Obter os zeros da função quadrática (2.6) equivale a obter as raízes da equação

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{2.9}$$

A fórmula resolvente, também conhecida como fórmula de Bhaskara, é deduzida reescrevendo o lado esquerdo da Eq. (2.10) em forma de um quadrado perfeito. Multiplicando primeiramente ambos os lados da equação por $4a$ e subtraindo $4ac$, obtemos

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$
$$4a^2x^2 + 4abx = 0 - 4ac$$

Para completar o quadrado perfeito somamos b^2 em ambos os lados

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac$$
$$(2ax + b)^2 = \Delta$$
$$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$$

Logo,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac. \tag{2.10}$$

Trabalhando no conjunto dos números reais, temos os seguintes casos a considerar:

i. Se $\Delta < 0$, não existe x que satisfaça a Eq. (2.10). Isso indica que a função não cruza, nem ao menos toca, o eixo das abscissas. A equação não tem solução real. Neste caso a função quadrática não possui zeros.

ii. Se $\Delta = 0$, existe um único x, $x = \frac{-b}{2a}$, ou seja, a função toca o eixo das abscissas apenas uma vez e a equação tem uma solução real única de multiplicidade 2. Neste caso a função quadrática possui um único zero.

iii. Se $\Delta > 0$ a função corta o eixo das abscissas em dois pontos distintos, ou seja, a equação possui duas soluções reais distintas. Neste caso a função quadrática possui exatamente dois zeros.

Exemplo 5. Construir o gráfico de $y = x^2 - 4$.

Igualando a função a zero, temos que $x = \pm 2$. As coordenadas dos vértices são $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 0$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -4$. Note que a função é decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$ e crescente em $]0, +\infty[$. Com essas informações já podemos esboçar o gráfico.

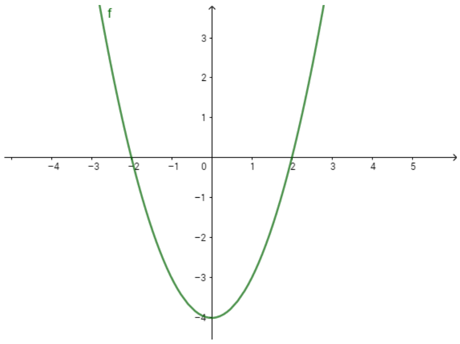


Figura 4 – Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4$.

No exemplo a seguir, mostramos a utilidade dos zeros de função no traçado de gráfico. Mas antes, vamos estudar a derivada de uma função polinomial (2.4). A partir das definições de derivada, chegamos na derivada da função constante

$$\text{se } f(x) = c \text{ então } f'(x) = 0;$$

e para uma potência inteira positiva

$$\text{se } f(x) = x^n,\ n \text{ inteiro positivo, então } f'(x) = nx^{n-1}.$$

obtemos a derivada

$$f'(x) = n\, a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1. \tag{2.11}$$

Exemplo 6. Construir o gráfico de $f(x) = -x^2 - 1$.

A abscissa do vértice é $x_v = -\dfrac{b}{2a} = 0$. Pelo Corolário 1, a função é crescente no intervalo $]-\infty, 0[$ pois $f'(x) = -2x > 0$ para todo x nesse intervalo e decrescente em $]0, +\infty[$ pois $f'(x) = -2x < 0$ para todo x nesse intervalo. Já a ordenada do vértice é $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a} = -1$. Como $\Delta < 0$, a função não cruza o eixo x e atinge o máximo no ponto $(0, -1)$,assim, esboçamos o gráfico - Figura 5.

Exemplo 7. Seja a função $p(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$. Determine os zeros de $p(x)$, escreva o polinômio em sua forma fatorada e trace o gráfico de p.

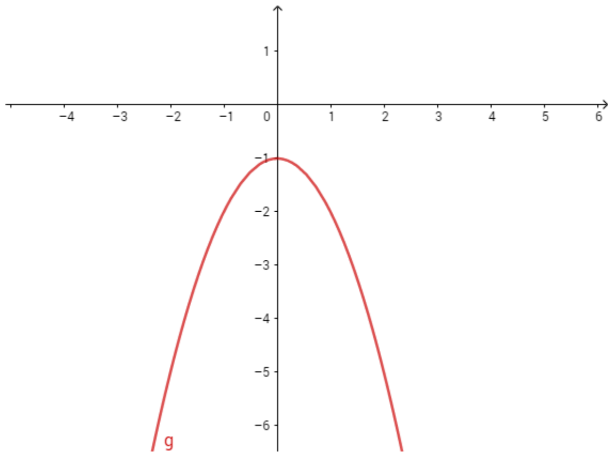


Figura 5 – Gráfico da função $f(x) = -x^2 - 1$.

Colocando x em evidência, temos $x(x^2 + 2x - 15) = 0$. De onde tiramos que $x = 0$ ou $x^2 + 2x - 15 = 0$. Usando a Eq. (2.10), $x = 3$ ou $x = -5$. Portanto, são zeros da função $p(x)$ os elementos do conjunto $\{-5, 0, 3\}$ e sua forma fatorada é $p(x) = x(x-3)(x+5)$.

Por (2.11), a derivada de $p(x)$ é $p'(x) = 3x^2 + 4x - 15$. Seus zeros mostram as alterações entre crescimento e decrescimento da função p. Assim, novamente usando a Eq. (2.10), $x = -3$ ou $x = \frac{5}{3}$. Usando o Corolário 1, como à esquerda de $x = -3$, $p'(x) > 0$, concluímos que a função p é crescente em $]-\infty, -3[$. De forma análoga, observamos que entre $x = -3$ ou $x = \frac{5}{3}$, $p'(x) < 0$, logo p é decrescente em $]-3, \frac{5}{3}[$; e à direita de $x = \frac{5}{3}$, $p'(x) > 0$, logo p é crescente em $]\frac{5}{3}, \infty[$.

Segue gráfico de $p(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$ na Figura 6, onde é possível observar as conclusões acima.

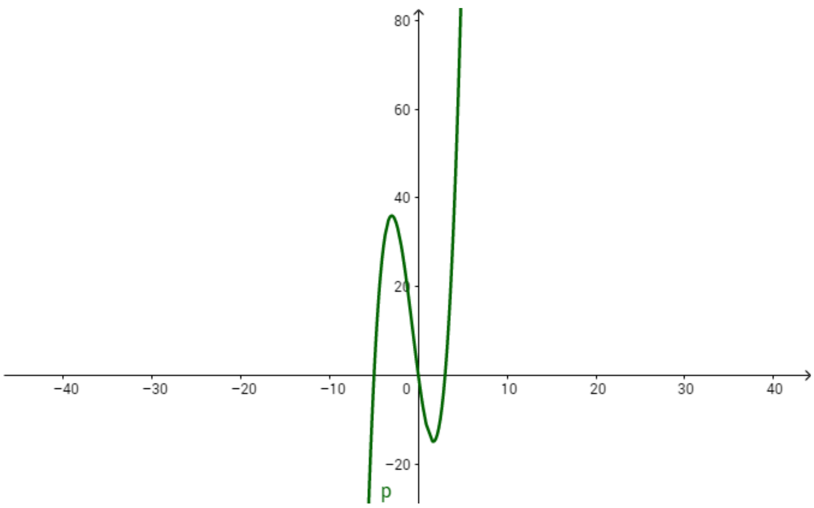


Figura 6 – Gráfico da função $p(x) = x^3 + 2x^2 - 15x$.

Encontrar os zeros de uma função polinomial (2.4) com $n > 2$ está longe de ser uma tarefa fácil. O Capítulo 3 traz alguns exemplos e comentários sobre a não existência de uma fórmula resolvente geral.

2.3 Funções seno, cosseno e tangente

A trigonometria é considerada uma área muito importante dentro dos ramos da matemática, pois auxilia na resolução de diversos problemas práticos. Os estudos iniciais sobre a trigonometria são associados ao grego Hiparco (190 a.C. - 120 a.C), que relacionou os lados e os ângulos de um triângulo retângulo e possivelmente construiu a primeira tabela de valores trigonométricos, por isso muitos o consideram o pai da trigonometria.

As funções trigonométricas são importantes devido à periodicidade. Assim, elas podem modelar vários fenômenos naturais periódicos como as variações diárias na temperatura da atmosfera terrestre, o comportamento ondulatório das notas musicais, a pressão sanguínea no coração ou o nível de água em uma bacia marítima (THOMAS *et al.*, 2002).

As três principais relações da trigonometria são: seno, cosseno e tangente. Definimos aqui essas três relações baseadas no ciclo trigonométrico e, em seguida, definimos as funções seno, cosseno e tangente.

Em um sistema cartesiano xOy, considere uma circunferência centrada no origem O e de raio $r = 1$, conforme Figura 7. Vamos chama-la de *circunferência trigonométrica* ou *ciclo trigonométrico*. A cada ponto P dessa circunferência, associamos um ângulo (medido em graus) da semirreta $\overrightarrow{OA}$ até a semirreta $\overrightarrow{OP}$, caminhando no sentido anti-horário; e o comprimento do arco do ponto A até P (medido em radianos).

Uma volta completa na circunferência equivale a $360°$ enquanto que a medida do arco é $2\pi r$ radianos, onde r é o raio. Portanto, o comprimento da circunferência trigonométrica é 2π. O ponto A é a origem, onde o ângulo é $0°$ e o arco mede $0\,rad$, o ponto B, corresponde a $90°$ e $\frac{\pi}{2}rad$, o ponto A', $180°$ e πrad e o ponto B', $270°$ e $\frac{3\pi}{2}rad$.

Partindo do ponto A na Figura 7 e caminhando sobre a circunferência no sentido anti-horário, definimos os quadrantes da seguinte forma: de A até B chamamos de $1°$ quadrante, de B até A' chamamos de $2°$ quadrante, de A' até B' chamamos de $3°$ quadrante e B' até A chamamos de $4°$ quadrante.

Ainda na Figura 7, o eixo vertical é chamado de *eixo dos senos* e o eixo horizontal, de *eixo dos cossenos*. Essa nomenclatura vem da definição das medidas de seno e cosseno no triângulo retângulo, apresentadas mais adiante e ilustrada na Figura 11.

Definição 8. Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$ sejam P sua imagem na circunferência e P_1 a projeção ortogonal de P sobre o eixo dos senos. Denominamos *seno* de x, e indicamos por $\mathrm{sen}(x)$, a ordenada P_1 em relação ao sistema xOy.

A Figura 8 (a) mostra o seno de um dado $x \in]0, \pi/2[$. Para um x qualquer entre 0 e 2π,

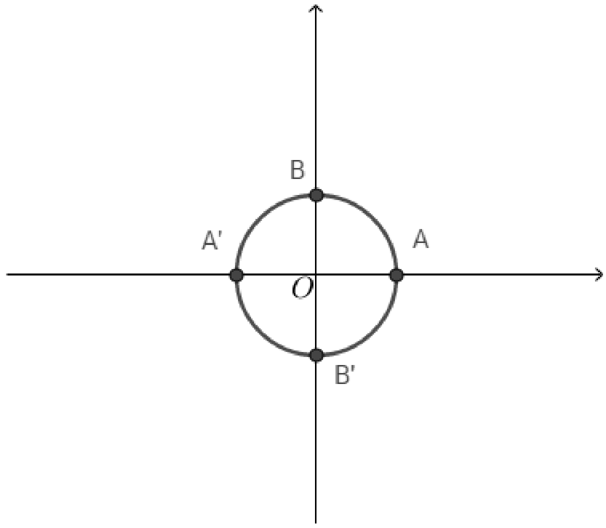


Figura 7 – Circunferência trigonométrica.

se sua imagem P for do 1° ou do 2° quadrante, então o seno é positivo, pois sua projeção no eixo dos senos está acima da origem, se for do 3° ou do 4° quadrante, então o seno é negativo, pois sua projeção no eixo dos senos está abaixo da origem, conforme esquematizado na Figura 8 (b).

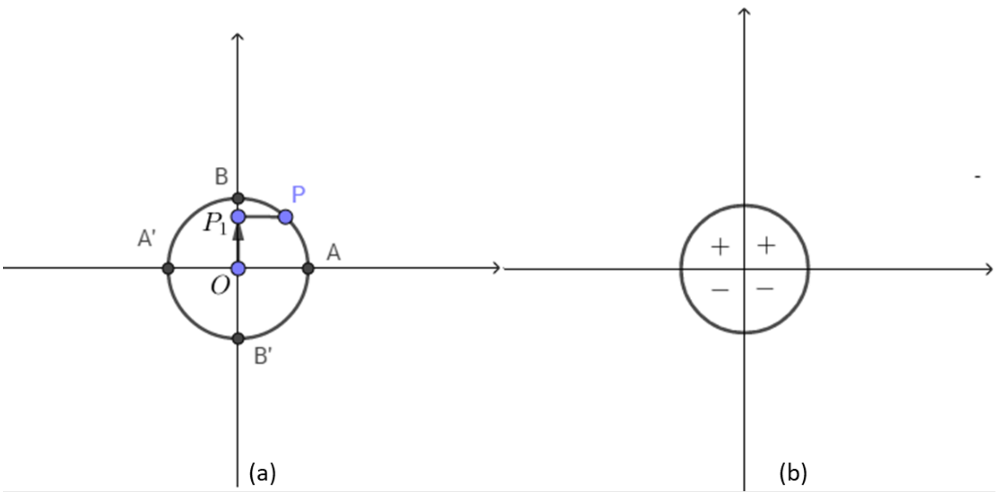


Figura 8 – (a) A ordenada de P_1 é o seno de um $x \in [0, 2\pi]$ que tem como imagem na circunferência o ponto P (b) sinal do seno em cada quadrante.

Definição 9. Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$ sejam P sua imagem na circunferência e P_2 a projeção ortogonal de P sobre o eixo dos cossenos. Denominamos *cosseno* de x, e indicamos por $\cos(x)$, a abscissa de P_2 em relação ao sistema xOy.

A Figura 9 (a) mostra o cosseno de um dado $x \in]0, \pi/2[$. Para um x qualquer entre 0 e 2π, se sua imagem P for do 1° ou do 4° quadrante, então o cosseno é positivo, pois a projeção de P sobre o eixo dos cossenos está à direita da origem, se for do 2° ou do 3° quadrante, o cosseno é negativo, pois sua projeção sobre o eixo dos cossenos está à esquerda da origem, conforme esquematizado na Figura 9 (b).

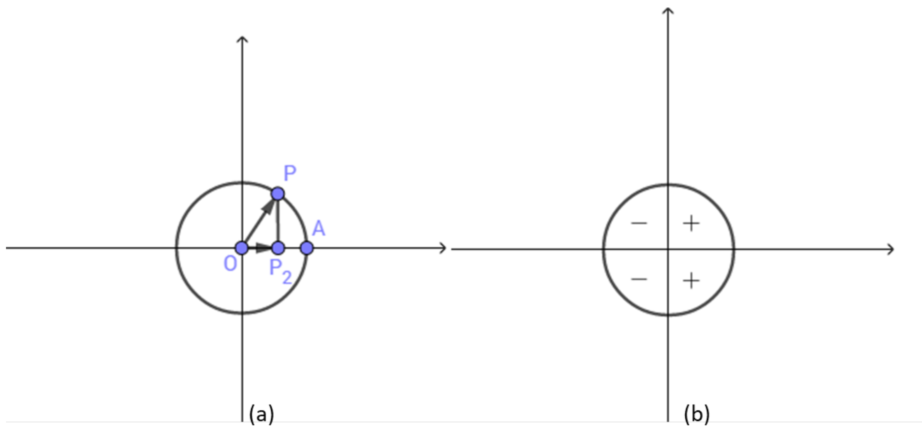


Figura 9 – (a) A abscissa de P_2 é o cosseno de um $x \in [0, 2\pi]$ que tem como imagem na circunferência o ponto P e (b) sinal do cosseno em cada quadrante.

O *eixo das tangentes* fica sobre a reta tangente à circunferência no ponto $(1,0)$, conforme ilustrado na Figura 10.

Definição 10. Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $x \neq \dfrac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem na circunferência. Seja T o ponto de intersecção da reta OP com o eixo das tangentes. Denominamos *tangente* de x, e indicamos $\text{tg}(x)$, a ordenada de T em relação ao sistema xOy.

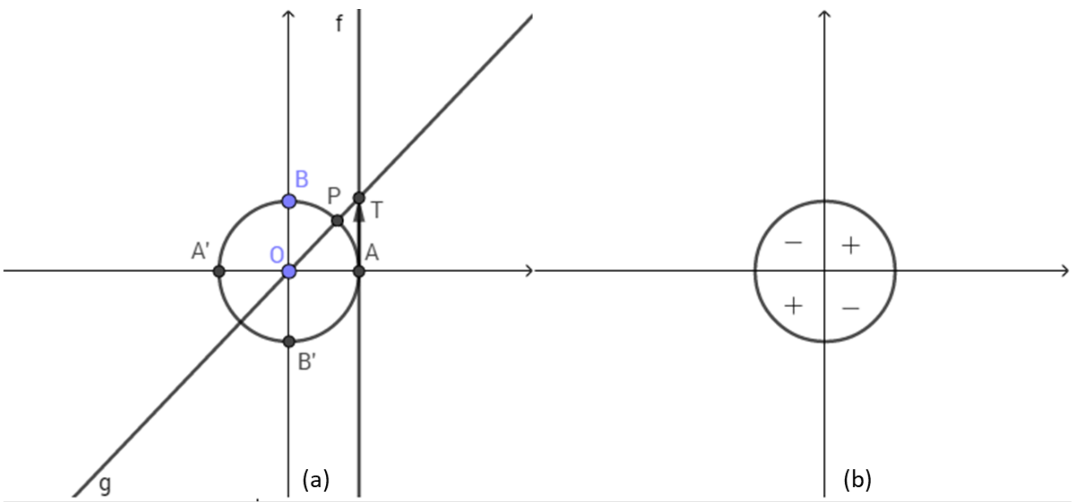


Figura 10 – (a) Ordenada de T é a tangente do ponto $x \in [0, 2\pi]$ que tem como imagem na circunferência o ponto P e (b) sinal da tangente em cada quadrante.

Observe que, para $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $x = \dfrac{3\pi}{2}$, a reta OP fica paralela ao eixo das tangentes. Como nesse caso não existe o ponto de intersecção T, a $\text{tg}(x)$ não está definida.

Para um x qualquer entre 0 e 2π, $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $x = \dfrac{3\pi}{2}$, se sua imagem P estiver no 1° ou no 3° quadrante, então a tangente é positiva, pois T está acima da origem, se P estiver no 2° ou no 4° quadrante, a tangente é negativa, pois T está abaixo da origem.

Por meio de um triângulo retângulo, ilustrado na Figura 11, podemos verificar que

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}. \tag{2.12}$$

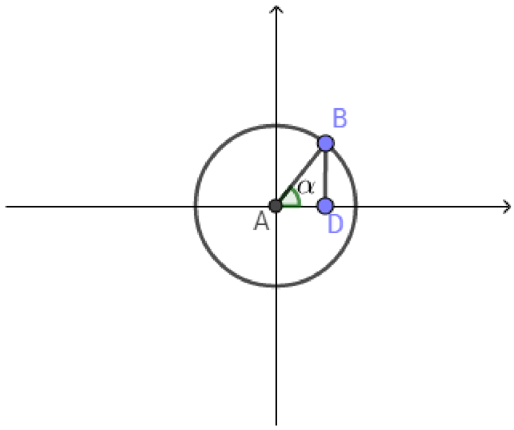


Figura 11 – Triângulo retângulo de hipotenusa 1.

A hipotenusa do triângulo da Figura 11 mede 1 por ser o raio de uma circunferência unitária. Por semelhança de triângulos, comparando os triângulos das Figuras 10 (a) e 11, chamando o ângulo comum AOB de α, tiramos as seguintes conclusões:

$\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{BD}{AB} = BD$ já que $AB = 1$;

$\cos(\alpha) = \dfrac{AD}{AB} = AD$;

$\operatorname{tg}(\alpha) = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

Além disso, pelo Teorema de Pitágoras, verificamos a relação fundamental da trigonometria,

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1. \tag{2.13}$$

A Tabela 1 mostra as relações seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

Tabela 1 – Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis.

x	$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\operatorname{tg}(x)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Para mais detalhes sobre trigonometria no triângulo retângulo, veja (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

Para construir as funções seno e cosseno, observamos que para cada valor x, $0 \leq x \leq 2\pi$, existe um correspondente $y \in \mathbb{R}$ obtido por meio de uma das leis $y = \text{sen}\, x$ ou $y = \cos x$. Agora, se considerarmos $x \in \mathbb{R}$, fazendo o ponto P das Figuras 8 ou 9 dar várias voltas no ciclo trigonométrico e também rodar no sentido horário quando x assumir valores negativos, teremos as seguintes funções:

- função seno, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}\, x$, que associa cada ponto $x \in \mathbb{R}$ a uma imagem $\text{sen}\, x$. O gráfico da função seno é formado pelos pontos do tipo $(x, \text{sen}(x))$, e pode ser visto na Figura 12.

  Trata-se de uma função limitada, com imagem em $[-1, 1]$, e periódica, de período $p(f) = 2\pi$ pois $\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de acordo com a Definição 6. Relacionando com o sinal dos quadrantes, se x percorre o 1° ou o 4° quadrante, então $\text{sen}(x)$ é crescente, e caso percorra o 2° ou 3° quadrante, então é decrescente.

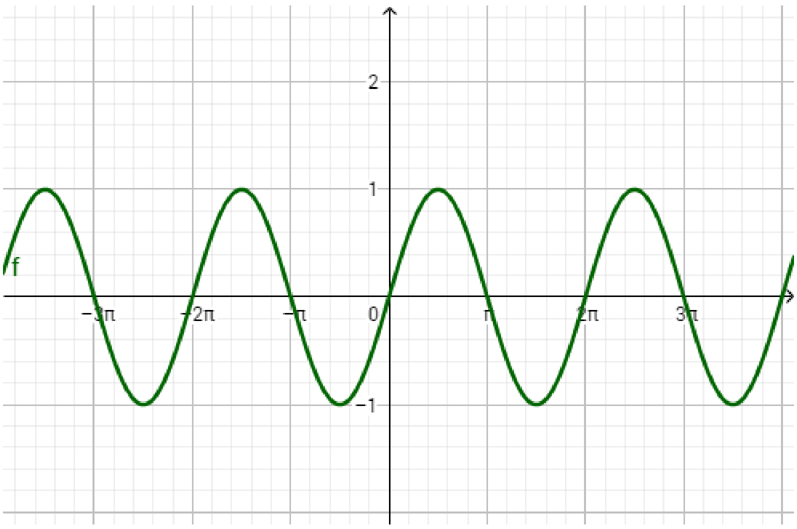


Figura 12 – Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$.

- a função cosseno, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$, que associa cada ponto $x \in \mathbb{R}$ a uma imagem $\cos x$. O gráfico da função cosseno é formado pelos pontos do tipo $(x, \cos(x))$, e pode ser visto na Figura 13.

  Trata-se de uma função limitada, com imagem em $[-1, 1]$, e periódica, de período $p(f) = 2\pi$, pois $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de acordo com a Definição 6. Relacionando com o sinal os quadrantes, se x percorre o 1° ou o 2° quadrante, então $\cos(x)$ é decrescente, e caso percorra o 3° ou 4° quadrante, então é crescente.

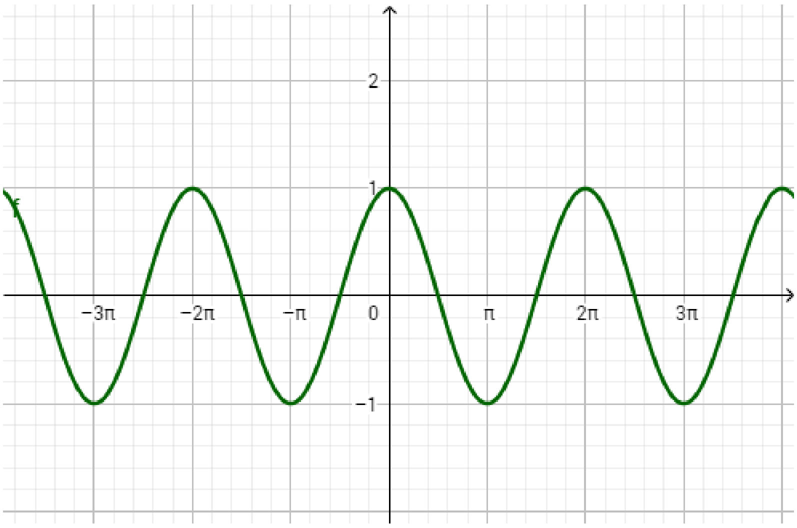


Figura 13 – Gráfico de $f(x) = \cos(x)$.

Já a função tangente, $f(x) = \text{tg}(x)$ não está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Seu domínio é $D_{tg} = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$. Porém, a ideia é a mesma, para cada $x \in D_{tg}$, os pontos do gráfico dessa função são da forma $(x, \text{tg}(x))$, que pode ser visto na Figura 14.

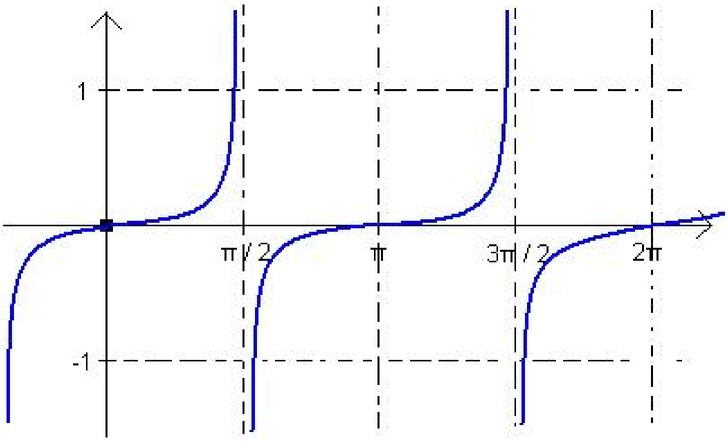


Figura 14 – Gráfico de $f(x) = \text{tg}(x)$.

A função $f(x) = \text{tg}\, x$ é ilimitada, pois sua imagem é $]-\infty, \infty[$, é periódica com período $p(f) = \pi$ e é sempre crescente para todo x em seu domínio, independentemente do quadrante.

Quanto às derivadas, para a função seno é a função cosseno, isto é,

$$(\text{sen}\, x)' = \cos x; \tag{2.14}$$

pois sendo $f(x) = sen(x)$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - sen(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{cos(h)}{h} \cdot sen(x) + cos(x) \cdot \frac{sen(h)}{h} - \frac{sen(x)}{h} \right]$$

$$\lim_{h \to 0} \left[sen(x) \left(\frac{cos(h)}{h} - 1 \right) + \frac{sen(h)}{h} \cdot cos(x) \right]$$

$$\lim_{h \to 0} sen(x) \cdot 0 + cos(x) \cdot 1 = cos(x)$$

.

Para a função cosseno é a oposta da função seno, isto é,

$$(\cos x)' = -\text{sen}\, x; \tag{2.15}$$

e, para a função tangente é a inversa do cosseno ao quadrado

$$(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{2.16}$$

As deduções dessas derivadas a partir da Definição 5 podem ser encontradas na maioria dos livros de Cálculo, por exemplo, em (THOMAS *et al.*, 2002).

Essas três funções podem ser alteradas por constantes aditivas e multiplicativas. Alguns exemplos de funções trigonométricas são (DANTE, 2013):

a) $f(x) = 2\cos(x)$

b) $f(x) = \text{sen}(5x)$

c) $f(x) = 2\cos(-x) - \frac{1}{2}\text{sen}(5x)$

d) $f(x) = 3\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

Por serem periódicas, essas funções, em geral, apresentam infinitos zeros. No caso da função $f(x) = \text{sen}\, x$, os zeros são $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Para a função $f(x) = \cos x$, os zeros são todos os $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Já para a função $f(x) = \text{tg}\, x$, os zeros são $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.4 Funções exponencial e logarítmica

As funções exponenciais são utilizadas para representar situações onde temos uma taxa de variação considerada muito grande, como por exemplo, rendimentos financeiros capitalizados por juros compostos, ou crescimento de uma colônia de bactérias.

A lei de formação de uma função exponencial é $f : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ tal que

$$f(x) = a^x, \tag{2.17}$$

sendo $a > 0$ e $a \neq 1$. A imagem de $f(x) = a^x$ é o conjunto de todos os números reais positivos.

A função exponencial segue as propriedades dos expoentes (IEZZI, 2004a). Para quaisquer $a > 0$, $b > 0$ e $x, y \in \mathbb{R}$:

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
3) $(a^x)^y = a^{xy}$;
4) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$;
5) $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$;
6) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^x > a^y$, quando $0 < a < 1$.

As demonstrações das propriedades acima podem ser encontradas em (DANTE, 2013).

A função exponencial $f(x) = a^x$ calculada em $x = 0$ fica $f(0) = a^0 = 1$, isto é, o par ordenado $(0,1)$ pertence ao gráfico para todo $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. Isto significa que o gráfico de toda função exponencial do tipo (19) corta o eixo y no ponto de ordenada 1.

Decorrente da Propriedade 6), a função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente se, e somente se, $a > 1$ e decrescente se, e somente se, $0 < a < 1$. De fato, dados os reais x_1 e x_2, temos

- quando $a > 1$, $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- quando $0 < a < 1$, $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Além disso, o gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$ está totalmente acima do eixo x, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ela não cruza o eixo x e, consequentemente, não tem zeros. No entanto, se a função for alterada por constates aditivas ou multiplicativas ou por combinação com outras funções, ela pode cruzar o eixo x e com isso, passa a ter zeros.

O gráfico da função $f(x) = a^x$ tem um dos aspectos mostrados na Figura 15, dependendo do valor da base a.

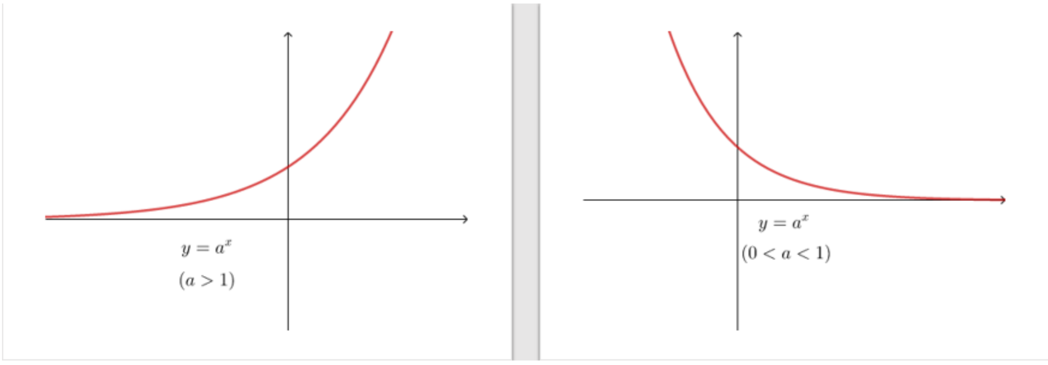


Figura 15 – Gráfico de funções exponenciais.

A função logarítmica de base a, definida por $f(x) = \log_a x$ é a função inversa da função exponencial a^x, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Logo, $a^{\log_a x} = x$ e $\log_a a^x = x$, com $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$. O domínio da função $f(x) = \log_a x$ é $]0, \infty[$, a imagem de a^x. A imagem de $f(x) = \log_a x$ é $\mathbb{R}$, o domínio de a^x.

O gráfico da função logarítmica é simétrico ao gráfico da função exponencial em relação à reta $y = x$, conforme pode ser visto na Figura 16. O gráfico da esquerda mostra o comportamento quando $a > 1$ e o da direita, quando $0 < a < 1$.

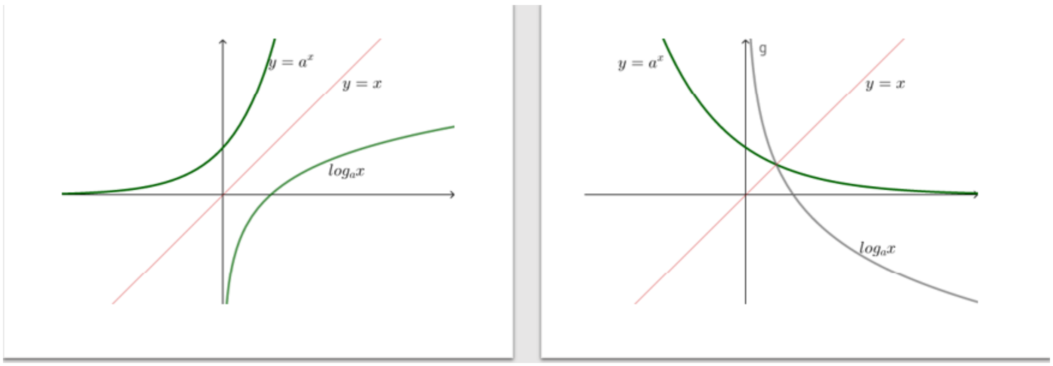


Figura 16 – A função exponencial e sua inversa, que é a função logarítmica

As propriedades do logaritmo decorrem das propriedades da potenciação e da relação $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, para a número real positivos, com $a \neq 1$ e x, y reais positivos. Algumas delas são:

1) $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$;

2) $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$;

3) $\log_a a^y = y$, pois $a^y = a^y$;

4) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$;

5) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

6) $\log_a x^c = c \cdot \log_a x$.

7) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$;

As demonstrações das propriedades acima podem ser encontradas em (DANTE, 2013). Quando resolvemos equações que envolvem logaritmos, por várias vezes precisamos reescrever as expressões utilizando suas propriedades.

Um número muito importante na matemática é o número e, o número de Neper ou neperiano, cuja descoberta é atribuída a John Napier (1550-1617), um matemático, físico, astrônomo, astrólogo e teólogo escocês.

O e é um número irracional e surge como limite, da sucessão

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e, \quad \text{quando } n \to \infty,$$

e tem valor aproximado de $2,718281828459$.

Por suas propriedades particulares, o número e tem sido usado como base de funções exponenciais e logarítmicas e é muito importante para a modelagem de fenômenos biológicos, físicos e econômicos. A função exponencial de base e, é chamada de *função exponencial natural* e a função logarítmica de base e é chamada de *função logaritmo natural* e denotada por $\ln x$. Portanto, $y = \ln(x)$, se, e somente se, $e^y = x$.

Quando a base do logaritmo for 10, não há necessidade de a explicitar. A notação fica $f(x) = \log(x)$.

A derivada da função exponencial natural é a própria função, isto é,

$$(e^x)' = e^x; \tag{2.18}$$

e de uma exponencial com base a, $0 < a \neq 0$ é

$$(a^x)' = a^x \ln\, a. \tag{2.19}$$

A derivada da função logaritmo natural e dada por

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{2.20}$$

e de uma função logarítmica de base a qualquer $0 < a \neq 0$ é

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\, \ln a}. \tag{2.21}$$

As demonstrações das derivadas acima, podem ser encontradas em (THOMAS *et al.*, 2002).

Alguns exemplos de funções exponenciais e logarítmicas são:

a) $f(x) = 2^{x+3}$

b) $f(x) = e^{\text{sen}(5x)}$

c) $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x + 4$

d) $e^{x/2} + 4x - 2$

e) $f(x) = \log_2(x)$

f) $f(x) = \log(x^2 + 5x - 1)$

g) $f(x) = \ln(x - 1)$

A função $f(x) = \log_a x$ possui um único zero em $x^* = 1$. Porém, essa condição pode ser mudada quando essa função for modificada por alguma constante ou outra função.

Com isso, terminamos a revisão das funções propostas. Como já dissemos anteriormente, no capítulo seguinte, vamos usar essas funções para buscar soluções de equações.

CAPÍTULO

3

SOLUÇÕES ANALÍTICAS DE EQUAÇÕES

Neste capitulo apresentamos técnicas analíticas para resolver equações que envolvem as funções apresentadas no Capítulo 2. Basicamente efetuamos manipulações algébricas e simplificações por meio de operações elementares que nos levam a equações equivalentes (que têm a mesma solução) até que se consiga uma equação simples, de fácil resolução. As soluções obtidas por técnicas analíticas são exatas, a menos de erros de arredondamento nas contas com os números reais. Incluímos uma grande quantidade de exemplos com objetivo de explorar diferentes equações e diferentes manipulações algébricas.

Definição 11. Dados duas funções reais $g(x)$ e $h(x)$, chama-se *equação* a igualdade

$$g(x) = h(x). \tag{3.1}$$

Uma solução da Eq. (3.1) é um valor x, neste trabalho $x \in \mathbb{R}$, que torna a igualdade (3.1) verdadeira. As soluções de uma equação são chamadas *raízes*. O conjunto de todas as raízes de uma equação dada é chamado *conjunto solução*. Com isso, estabelecemos que resolver uma equação é obter seu conjunto solução.

3.1 Equações Polinomiais

Considere p_1 e p_2 dois polinômios, chama-se equação polinomial ou equação algébrica a igualdade

$$p_1(x) = p_2(x). \tag{3.2}$$

Existem duas operações elementares que podemos aplicar em uma equação polinomial e que não alteram seu conjunto solução (IEZZI, 2005). São elas:

- somar aos dois membros o mesmo polinômio, isto é, se $p_1(x) = p_2(x)$ então $p_1(x) + h(x) = p_2(x) + h(x)$;

- multiplicar os dois membros pelo mesmo número real k, $k \neq 0$, isto é, se $p_1(x) = p_2(x)$ então $kp_1(x) = kp_2(x)$.

Com as observações acima, podemos transformar a Eq. (3.2) em sua forma irredutível

$$p(x) = 0. \tag{3.3}$$

Resolver equações polinomiais é um assunto estudado desde a civilização babilônica (século XVI a.C. até VI d.C.) e, por esse motivo, está fundamentado em resultados conhecidos como o Teorema do Resto: o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x-\alpha$ é igual ao valor numérico de p em α; e o Teorema de D'Alembert, que relaciona um polinômio com sua raiz: um polinômio é divisível por $x-\alpha$ se, e somente se, α for raiz de p. Estes resultados mostram que caso seja conhecida uma raiz α do polinômio $p(x)$ podemos dividi-lo por $x-\alpha$.

Sobre a quantidade de raízes que uma equação polinomial admite, pelo Teorema Fundamental da Álgebra (CORNELIO; PRADO, 2006), um polinômio não constante de grau n possui no máximo n raízes reais.

O Teorema das raízes racionais se aplica apenas a polinômios com coeficientes inteiros: se um número racional p/q, com p e q primos entre si, for raiz de uma equação polinomial de coeficientes inteiros do tipo $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$ se, e somente se p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Exemplo 8. Resolva a equação $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3 = 0$.

Primeiramente, observamos que os coeficientes são todos inteiros, o que nos sugere buscar por soluções do tipo racional. As possíveis soluções são da forma $\dfrac{p}{q}$ onde p é divisor de 3 e q é divisor positivo de 2, ou seja, $p \in \{-3,-1,1,3\}$ e $q \in \{-2,-1,1,2\}$.

Assim, as possíveis raízes racionais são $\left\{-\dfrac{3}{1}, -\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{1}, \dfrac{3}{1}, \dfrac{-3}{2}, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$. Fazendo a verificação para cada elemento desse conjunto, encontramos o conjunto solução $\{-3, 1, \dfrac{1}{2}\}$.

Exemplo 9. Fatore o polinômio $p = 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x - 6$.

Pelo teorema das raízes racionais, obtemos que $x^* = -1$ e $x^* = 2$ são as raízes racionais. Pelo Teorema fundamental da álgebra, p tem no máximo 4 raízes. Então, vamos procurar por outras raízes reais. Dividindo p por $(x+1)$ obtemos $q_1(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x - 6$, o qual dividimos por $(x-2)$, obtendo $q_2(x) = 3x^2 + 3$. A equação $q_2(x) = 0$ não possui raiz no conjunto dos números reais.

Portanto, $p(x)$ na forma fatorada fica $p(x) = (x+1)(x-2)(3x^2+3)$.

Exemplo 10. Encontre a solução da equação $-x^2-5x+3=2x^2+5x-4$.

Primeiramente, colocamos o polinômio na forma (3.3) utilizando as operações elementares

$$x^2(-1-2)+x(-5-5)+(3+4)=0,$$

obtendo

$$-3x^2-10x+7=0.$$

Agora, aplicando Eq. 2.10 e encontramos o conjunto solução $S=\left\{1,\frac{7}{3}\right\}$.

Conforme vimos nos exemplos acima, encontrar as raízes de uma equação polinomial, Eq. (3.2), com $n>2$ está longe de ser uma tarefa fácil. Para alguns casos particulares, é possível encontrar alguma raiz e reduzir a ordem do polinômio ou realizar uma troca de variável, entre outras manipulações, mas em geral, para $n\geq 3$ é um problema de difícil solução.

Por exemplo, a simples equação $5x^3+x^2-12x+4=0$ possui todos os coeficientes inteiros e, pelo Teorema das raízes racionais, verificamos que ela não possui raiz racional. De fato, as possíveis soluções racionais seriam $\left\{1,2,4,\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5},\dfrac{4}{5}\right\}$ mas nenhum elemento deste conjunto é raiz. Como se trata de um polinômio de grau 3, sabemos que ele terá no máximo três raízes reais. Além disso, como os coeficientes são todos reais, se houver raízes complexas, elas aparecerão aos pares conjugados, o que garante a existência de pelo menos uma raiz real.

Para polinômios de grau 3 e 4, existem fórmulas resolventes em função dos coeficientes e radicais, devidas a Cardano e Ferrari, embora elas sejam pouco práticas. Para mais detalhes, veja (PASSOS, 2017). Já para polinômios de grau maior que 4, não existem fórmulas resolventes e, neste caso, é preciso adotar outras estratégias, como reduzir o grau do polinômio ou usar métodos numéricos.

3.2 Equações trigonométricas

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções trigonométricas de variável x, e sejam A e B seus respectivos domínios. Resolver uma equação trigonométrica $f(x)=g(x)$, significa determinar o conjunto solução, ou seja, conjunto de todos os números $x^*\in A\cap B$, tal que $f(x^*)=g(x^*)$ seja verdadeira.

De um modo geral, quase todas as equações trigonométricas vão ter como base uma das seguintes equações (IEZZI, 2004b):

1) $\operatorname{sen}(\alpha)=\operatorname{sen}(\beta)$.

2) $\cos(\alpha)=\cos(\beta)$

3) $\operatorname{tg}(\alpha)=\operatorname{tg}(\beta)$

denominadas, por esse motivo, equações fundamentais.

3.2.1 Equação sen(α) = sen(β)

Para essa equação temos duas possibilidades, devido a sua periodicidade:

- α e β têm mesma imagem
- α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos

de onde concluímos que

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi - \beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

Exemplo 11. Resolva a equação $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Este exemplo é uma aplicação direta da fórmula $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\beta)$ com $\alpha = x$ e $\beta = \frac{\pi}{5}$. Logo, $x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi$.

Portanto, o conjunto solução da equação dada é $S = \{x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Podemos observar algumas soluções no gráfico da Figura 17, onde fica claro que o conjunto solução possui infinitos pontos.

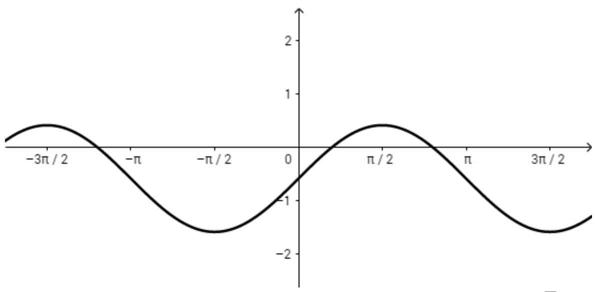


Figura 17 – Gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exemplo 12. Resolva as seguintes equações:

a) $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{4}$.

b) $2\operatorname{sen}^2(x) - 3\operatorname{sen}(x) + 1 = 0$.

c) $2\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$.

d) $\operatorname{cossec}(x) = \operatorname{cossec}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Cada uma dessas quatro equações apresenta uma manipulação algébrica específica. O item a) explora funções trigonométricas em seu formato quadrático, no item b) o argumento x aparece em ambos os membros da equação fundamental, o item c) mistura as funções seno e cosseno e utiliza a relação fundamental (2.13) e, por último, no item d) aparece a função cossecante, neste caso, precisamos tomar cuidado com o domínio das funções.

Resolução:

a) $\text{sen}^2(x) = \dfrac{1}{4}$.

Extraindo a raiz quadrada, $\text{sen}(x) = \pm\sqrt{\dfrac{1}{4}} \Rightarrow \text{sen}(x) = \pm\dfrac{1}{2}$.

Transformamos $\text{sen}(x) = \dfrac{1}{2}$ em $\text{sen}(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, que sabemos que possui as seguintes raízes do tipo $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Transformamos $\text{sen}(x) = -\dfrac{1}{2}$ em $\text{sen}(x) = \text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, que sabemos que possui as seguintes raízes do tipo $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{7\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

Com isso, temos como solução o conjunto:

$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\}$.

b) $2\text{sen}^2(x) - 3\text{sen}(x) + 1 = 0$.

Fazendo a mudança de variável $\text{sen}(x) = y$, obtemos a equação do 2° grau $y^2 - 3y + 1 = 0$, que possui como solução $y = \dfrac{1}{2}$ ou $y = 1$.

Se $\text{sen}(x) = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Se $\text{sen}(x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$.

c) $2\cos^2(x) = 1 - \text{sen}^2(x)$.

Usando a equação fundamental (2.13), $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$, obtemos

$2(1 - \text{sen}^2(x)) = 1 - \text{sen}^2(x)$

Portanto, $\text{sen}(x) = \pm 1 \Rightarrow \text{sen}(x) = 1$ ou $\text{sen}(x) = -1$.

Logo, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R}; x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$.

d) $\text{cossec}(x) = \text{cossec}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

A função cossecante é definida por $\text{cossec}(x) = \dfrac{1}{\text{sen}(x)}$. No entanto, como o seno aparece no denominador, o domínio da função cossecante são todos os reais menos os pontos onde $sen(x) = 0$, ou seja, $\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. O domínio da função seno é $\mathbb{R}$. A solução precisa pertencer à intersecção dos dois domínios. Logo, vamos procurar por soluções em $S_1 = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

O gráfico da função $\text{cossec}(x)$ não cruza o eixo dos x, portanto essa função não tem zeros.

Já a função $f(x) = \text{cossec}(x) - \text{cossec}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ tem o mesmo comportamento da fução cossecante só que deslocado para baixo. Ela possui infinitos zeros, veja a Figura 18.

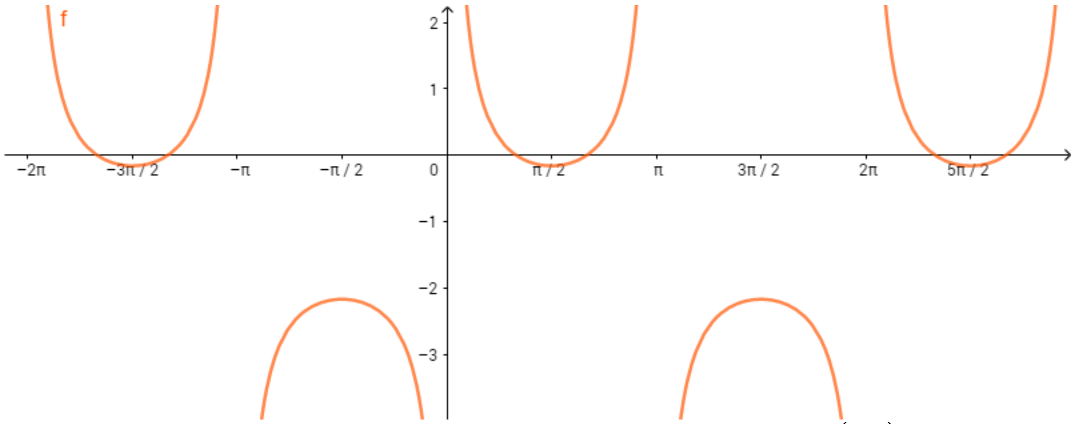


Figura 18 – Gráfico da função $f(x) = \text{cossec}(x) - \text{cossec}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Transformando as cossecantes em senos na equação que estamos resolvendo,

$$\frac{1}{\text{sen}(x)} = \frac{1}{\text{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)} \Rightarrow \text{sen}(x) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Assim, $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ e as soluções estão em

$S_2 = \{x \in \mathbb{R}; x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\}$.

Fazendo $S_1 \cap S_2$, observamos que o conjunto solução é S_2.

3.2.2 Equação cos(α) = cos(β)

Para essa equação, temos duas possibilidades, devido a sua periodicidade:

- α e β têm mesma imagem
- α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos

de onde concluímos que

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = -\beta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{3.5}$$

Exemplo 13. Resolva a equação $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Este exemplo é uma aplicação direta da fórmula $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ com $\alpha = x$ e $\beta = \frac{\pi}{5}$.

Logo, por (3.5), $x = \pm\dfrac{\pi}{5} + 2k\pi$ e o conjunto solução procurado é

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \pm\frac{\pi}{5} + 2k\pi\}.$$

Exemplo 14. Resolva as seguintes equações:

a) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cos(2x) = \cos(x)$;

c) $\sec(x) = \sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

Cada uma dessas três equações apresenta uma manipulação algébrica específica. O item a) explora a transformação na equação fundamental $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$, no item b) o argumento x aparece em ambos os membros da equação fundamental e, por último, no item c) aparece a função secante, neste caso, precisamos tomar cuidado com o domínio das funções.

Resolução:

a) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Começamos colocando na forma fundamental $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Da relação (3.5), $2x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$. Logo, $x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi$ e o conjunto solução é

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi\}.$$

b) $\cos(2x) = \cos(x)$.

Então $2x = x + 2k\pi$ ou $2x = -x + 2k\pi$. Isolando a variável, $x = 2k\pi$ ou $3x = 2k\pi$.

$S = \{x \in \mathbb{R}; x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3}\}$.

c) $\sec(x) = \sec\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

A função secante é definida por $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. No entanto, como o cosseno aparece no denominador, o domínio da função secante são todos os reais menos os pontos onde $cos(x) = 0$, ou seja, $\mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$. A solução precisa pertencer à intersecção dos dois domínios. Logo, vamos procurar por soluções em $S_1 = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Transformando as secantes em cossenos na equação que estamos resolvendo,

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \Rightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Assim, as soluções estão em
$S_2 = \{x \in \mathbb{R}; x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$.
Fazendo $S_1 \cap S_2$, observamos que o conjunto solução é S_2.

3.2.3 Equação tg(α) = tg(β)

Para essa equação, temos duas possibilidades , devido a sua periodicidade:

- α e β têm mesma imagem
- α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo

de onde concluímos que

$$\text{tg}(\alpha) = \text{tg}(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \tag{3.6}$$

É importante lembrar aqui que o domínio da função tangente é $D_{tg} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exemplo 15. Resolva as equações tg$(x) = 1$ e tg$(2x) = $ tg(x).

A primeira equação, transformando na equação fundamental fica tg$(x) = $ tg $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ com $\alpha = x$ e $\beta = \frac{\pi}{4}$. Agora podemos aplicar técnica (3.6), obtendo $S = \{x \in \mathbb{R}/x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

De tg$(2x) = $ tg(x), tiramos diretamente que $2x = x + k\pi$. Isolando a variável, $x = k\pi$. Logo,

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Exemplo 16. Resolva as seguintes equações:

a) $\text{sen}(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 0$

b) $\text{sen}^2(x) = \cos^2(x)$.

c) $\text{cotg}(x) = \sqrt{3}$

d) $\text{cotg}(x) - \text{sen}(2x) = 0$

O item a) mostra que muitas vezes transformar seno e cosseno em tangente facilita a resolução de equações, o item b) trabalha com a quadrática da função tangente, o item c) usa a função cotangente e o item d) mistura as funções cotangente e seno de arco duplo.

Resolução:

a) $\text{sen}(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 0$

$\Rightarrow \text{sen}(x) = \sqrt{3}\cos(x)$

$\Rightarrow \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} = \sqrt{3}, \quad x \neq \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\Rightarrow \text{tg}(x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

As soluções são do tipo $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. Como esses pontos pertencem ao D_{tg}, o conjunto solução é formado por todos eles:

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) $\text{sen}^2(x) = \cos^2(x)$.

Este exemplo poderia ser resolvido usando a equação fundamental da trigonometria (2.13) mas optamos por apresentar uma técnica alternativa usando a tangente.

$\text{tg}^2(x) = 1$

$\text{tg}(x) = \pm 1$

se $\text{tg}(x) = -1$ então $\text{tg}(x) = \text{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, o que implica em $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$

se $\text{tg}(x) = 1$ então $\text{tg}(x) = \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, o que implica em $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Como esses pontos pertencem ao D_{tg}, o conjunto solução é formado por todos eles:

$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi\}.$

c) $\text{cotg}(x) = \sqrt{3}$

A função cotangente é definida por $\text{cotg}(x) = \dfrac{1}{\text{tg}(x)}$. Neste caso, a tangente, que aparece no denominador, se anula nos pontos $x^* = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, vamos procurar por soluções em $S_1 = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Transformando a cotangente em tangente, obtemos

$\dfrac{1}{\text{tg}(x)} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{tg}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}\right).$

Logo os candidatos à solução são os pontos $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$. Como todos eles estão no domínio da cotangente,

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{6} + k\pi\}.$$

d) $\text{cotg}(x) - \text{sen}(2x) = 0$

Este exemplo precisa de uma certa familiaridade com as fórmulas da trigonometria, como o seno da soma. Observando que $\text{sen}(2x) = \text{sen}(x+x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$, a equação fica

$\dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)} = 2\text{sen}(x)\cos(x), \quad \text{sen}(x) \neq 0$

$$\frac{1}{\text{sen}(x)} = \frac{2\text{sen}(x)\cos(x)}{\cos(x)}, \quad \cos(x) \neq 0$$
$$\frac{1}{\text{sen}(x)} = 2\text{sen}(x)$$
$$\text{sen}^2(x) = \frac{1}{2}$$
$$\text{sen}(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

se $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$ e se $\text{sen}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$. Portanto, as soluções são do tipo $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. Esses valores não pertencem às restrições impostas ao longo do exemplo, ou seja, $\text{sen}(x) \neq 0$ e $\cos(x) \neq 0$. Logo,

$$S = \{x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\}.$$

Mesmo com todos esses artifícios para solução dessas equações, algumas são bastante complicadas ou mesmo impossíveis de resolver, necessitando dos métodos numéricos.

3.3 Equações Exponenciais

Uma equação exponencial é uma expressão algébrica que possui uma igualdade e pelo menos a incógnita no expoente de alguma base diferente de 1.

A técnica de resolução consiste, basicamente, da aplicação da seguinte propriedade.

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y,\ a > 0,\ a \neq 1. \tag{3.7}$$

Isso significa que se duas potências possuem bases iguais, elas serão iguais se, e somente se, seus respectivos expoentes forem iguais também.

Exemplo 17. Encontre a solução das seguintes equações:

a) $5^x - 25 = 0$

Basta colocar no formato $a^x = a^y$.

$5^x = 25$

$5^x = 5^2$

Aqui, como as bases são iguais, positivas e diferentes de 1, para termos a igualdade, a Propriedade (3.7) diz que os expoentes devem ser iguais. Assim $x = 2$.

b) $3^{x+1} = 27$

O modo a se resolver este exemplo, é análogo ao anterior. Neste caso,

$3^{x+1} = 3^3$

$x+1=3$

$x=2.$

c) $16^x - \dfrac{1}{4} = 0$

Em um primeiro momento, pode parecer que as bases aqui são diferentes, mas após uma pequena manipulação algébrica ambos os termos ficam com a mesma base.

$4^{2x} = 4^{-1}$

$x = -\dfrac{1}{2}$

Algumas equações exigem artifícios de cálculo para que possam ser solucionadas. Nos exemplos a seguir ficará claro isso.

Exemplo 18. Resolva as equações exponenciais abaixo:

a) $3 \cdot 8^{x+1} = 96$

$8^{x+1} = 32 \Rightarrow (2^3)^{x+1} = 2^5 \Rightarrow 2^{3x+3} = 2^5 \Rightarrow 3x+3 = 5 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

$S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

b) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 18$

$\Rightarrow 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^{-1} = 18 \Rightarrow 2^x(2^2 + 2^{-1}) = 18 \Rightarrow 2^x \cdot \dfrac{9}{2} = 18 \Rightarrow 2^x = \dfrac{36}{9} = 2^x = 4 \Rightarrow$ $x = 2.$

$S = \{2\}.$

A equação acima também pode ser resolvida da forma a seguir:

$2^{x+2} + 2^{x-1} = 18 \Rightarrow 2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^{-1} = 18$

Fazendo $2^x = y$, teremos:

$4y + y \cdot \dfrac{1}{2} = 18 \Rightarrow 8y + y = 36 \Rightarrow y = 4$

Como $2^x = y$ e $y = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$

$S = \{2\}.$

c) $3^{2x} + 2 \cdot 3^x - 15 = 0.$

$3^x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^x - 15 = 0$

Fazendo $3^x = y$ temos:

$y^2 + 2y - 15 = 0$

$y = \dfrac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-2 \pm 8}{2}$

Se $y = 3$ então $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$.

Se $y = -5$ então $3^x = -5$ que não admite solução.

$S = \{1\}$.

d) $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$

Fazendo $2^x = y$, temos: $y^2 - 9y + 8 = 0$

$y = \dfrac{9 \pm \sqrt{49}}{2}$

Se $y = 8$ então $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$.

Se $y = 1$ então $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

$S = \{0, 3\}$.

3.4 Equações Logarítmicas

Agora vamos estudar as equações logarítmicas, ou seja, aquelas nas quais a incógnita está envolvida no logaritmando ou na base do logaritmo.

As equações logarítmicas podem ser classificadas em três tipos:

1°. $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Essa equação apresenta, ou se reduz a uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base a $(0 < a \neq 1)$.

$$\text{Se } 0 < a \neq 1, \text{ então}$$
$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) > 0.$$

2°. $\log_a f(x) = \alpha$.

Essa equação apresenta, ou se reduz a uma igualdade entre um logaritmo e um número real.

$$\text{Se } 0 < a \neq 1 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ então}$$
$$\log_a f(x) = \alpha \Rightarrow f(x) = a^{\alpha}.$$

3°. Uso de uma incógnita auxiliar.

Essa equação para ser resolvida, necessita de uma mudança de variável.

Exemplo 19. Resolva as equações abaixo:

a) $\log_2(x-3)+\log_2 x = 2$.

Conforme vimos na Seção 2.4 $g(x)=\log_2(x-3)$ está definida no domínio $D_g=\{x\in\mathbb{R}|x>3\}$ e para $h(x)=\log_2(x)$ com $D_h=\{x\in\mathbb{R}|x>0\}$. Logo, a equação que queremos resolver possui uma condição de existência dada por $D_g\cap D_h$, ou seja, devemos buscar a solução x, com $x>3$.

Há dois modos distintos para resolução dessa equação:

1) Considerando a equação como do 1° tipo, $\log_2(x-3)+\log_2 x = 2 \Rightarrow \log_2[(x-3)x] = \log_2 4$

$\Rightarrow (x-3)x = 4 \Rightarrow x^2-3x-4=0$

Resolvendo essa equação encontramos $x'=4$ e $x''=-1$. Pela condição de existência, x deve ser maior que 3 e com isso, a única solução é $x=4$.

2) Considerando a equação como do 2° tipo, $\log_2(x-3)+\log_2 x = 2 \Rightarrow \log_2[(x-3)x] = 2$

$(x-3)x = 2^2 \Rightarrow x^2-3x-4=0$

Resolvendo essa equação encontramos $x'=4$ e $x''=-1$. Porém, pela condição de existência, $S=\{4\}$.

b) $\log_x(36)=2$

Buscamos aqui um número que elevado ao expoente 2 dê 36.

$x^2=36\Rightarrow x^2=6^2\Rightarrow x=6$ ou $x=-6$.

Mas, pela definição de logaritmo, $x=6$.

c) $\log^2(x)-3\log(x)+2=0$.

Trata-se de logaritmo na base 10.

Condição de existência: $x>3$

A equação pode ser escrita como $(\log(x))^2-3\cdot\log(x)+2=0$

Fazendo $\log(x)=y$, temos: $y^2-3y+2=0$

Resolvendo, encontramos $y'=2$ e $y''=1$

Como $\log(x)=y$, então:

$\log(x)=2\Rightarrow 10^2=x\Rightarrow x=100$

$\log(x)=1\Rightarrow 10^1=x\Rightarrow x=10$

Como ambos os valores de x satisfazem a condição de existência, $S=\{10,100\}$.

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -3$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = x-2$

$8 = x-2$

$x = 10$

$S = \{10\}$.

e) $\log_3[7+\log_9(x-1)] = 2$.

$3^2 = 7+\log_9(x-1)$

$9-7 = \log_9(x-1)$

$2 = \log_9(x-1)$

$81 = x-1$

$x = 82$

$S = \{82\}$.

3.5 Resolvendo Equações

Nesta seção resolvemos algumas equações que misturam os tipos anteriores, agora com um nível de dificuldade maior.

Exemplo 20. Resolva a equação $5^x + 3\cdot 5^{2x} - 8 = 0$.

Fazendo $5^x = y$, temos:

$3y^2 - 5^y - 8 = 0$

$y = \dfrac{-1\pm\sqrt{98}}{6} = \dfrac{-1\pm 7\sqrt{2}}{6}$.

Como $5^x = y$,

se $5^x = \dfrac{-1-7\sqrt{2}}{6}$ não terá solução e,

se $5^x = \dfrac{-1+7\sqrt{2}}{6}$, temos que:

$\log(5^x) = \log\left(\dfrac{-1+7\sqrt{2}}{6}\right)$

$x\cdot\log(5) = \log(-1+7\sqrt{2}) - \log(6)$.

Logo, $S = \left\{\dfrac{\log(-1+7\sqrt{2})-\log(6)}{\log(5)}\right\}$.

Exemplo 21. Resolva a equação $\log^2(x+1)-\log(x+1)=0$

Fazendo a mudança de variável $\log(x+1)=y$,

$y^2-y=0 \Rightarrow y=0$ ou $y=1$.

Se $y=0$, $\log(x+1)=0$ então $10^0=x+1 \Rightarrow x=0$ e,

se $y=1$, $\log(x+1)=1$ então $10^1=x+1 \Rightarrow x=9$.

Logo, $S=\{0,9\}$.

Exemplo 22. Resolva a equação $\text{sen}^4(x)+\cos^4(x)=\dfrac{1}{2}$.

$\text{sen}^4(x)+\cos^2(x)\cdot\cos^2(x)=\dfrac{1}{2}$

$\text{sen}^4(x)+(1-\text{sen}^2(x))\cdot(1-\text{sen}^2(x))=\dfrac{1}{2}$

$2\text{sen}^4(x)-2\text{sen}^2(x)+\dfrac{1}{2}=0$

Fazendo $\text{sen}^2(x)=y$, temos:

$y^2-2y+\dfrac{1}{2}=0$

$y=\dfrac{2\pm 0}{4} \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}$

Como, $\text{sen}^2(x)=y$

$\text{sen}(x)=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Se $\text{sen}(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ então $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$

Se $\text{sen}(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ então $x=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$

$S=\left\{x\in\mathbb{R}; x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\right\}$.

Exemplo 23. (PROFMAT- Qualificação 2015-2) Determine todos os valores de $x\in\mathbb{R}$ tais que $(1-cos^2(x))^{cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}=1$.

Reescrevendo a equação como:

$(sen^2(x))^{cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}=1$.

A equação está bem definida em $x\in\mathbb{R}$, já que a base é estritamente positiva.

Temos 2 situações a se analisar:

i. A base é igual a 1 e o expoente é um número real não negativo.

Nesse caso temos $sen(x)=\pm 1$, isto é, $x=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$, com $n\in\mathbb{Z}$.

ii. A base é um número real positivo e o expoente é nulo, isto é, $sen(x) > 0$ e $cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Daí, $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, isto é, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Observação: $sen^2(x)$ e $cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ não se anulam para um mesmo valor de x, logo 0^0 não ocorre.

Exemplo 24. Quantas raízes tem a equação $2^x = x^2$?

De imediato observamos duas raízes, pois $x = 2 \Rightarrow 2^2 = 2^2$ e $x = 4 \Rightarrow 2^4 = 4^2$. Para saber se há mais alguma raiz, podemos construir em um mesmo plano o gráfico das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$ e verificar quantos são os pontos em comum dessas duas funções.

Construindo o gráfico, observa-se ainda mais um valor que x poderá assumir, sendo ele negativo. Portanto, a resposta é que existem três raízes para essa equação.

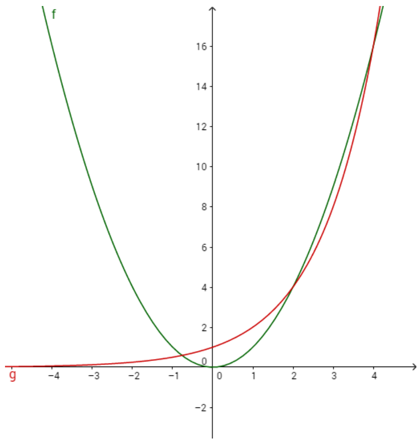


Figura 19 – Intersecções entre os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$.

A terceira solução será obtida com o auxílio de métodos numéricos e recursos computacionais, no Capítulo 5. Esse processo mostra que algumas vezes é importante aliar um o processo gráfico ao algébrico.

Os exemplos anteriores foram resolvidos aplicando manipulações algébricas e simplificações. Observamos que misturando os tipos de equações e acrescentando termos, a resolução fica cada vez mais difícil. Agora, imagine como ficaria a resolução da equação apresentada na Introdução:

$$e^x + \ln(\text{sen}(x)) = 0.$$

Ela não se encaixa em nenhuma das técnicas apresentadas. Daí a necessidade de se estudar os métodos numéricos, assunto do próximo capítulo.

CAPÍTULO

4

SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE EQUAÇÕES

Um dos problemas mais frequentes em trabalhos científicos é calcular raízes de equações da forma $f(x) = 0$, onde $f(x)$, pode ser qualquer tipo de função. Nem sempre é possível encontrar soluções para essas equações usando as técnicas analíticas descritas no Capitulo 3. Este capítulo trata dos métodos numéricos para a solução de equações. Estas técnicas nos fornecem soluções tão próximas das reais quanto se deseje buscar, por meio de uma tolerância pré-estabelecida. Para aplicação dos métodos numéricos, é preciso se ter uma noção de onde a solução da equação se encontra, feito isso, isolamos as raízes em um intervalo onde deverá se buscar a solução. Os métodos estudados neste capitulo são o Método da Bissecção, o Método de Newton, o Método do Ponto Fixo e o Método das Secantes.

4.1 Isolando as raízes

Para iniciar o Método da Bissecção aplicado a uma equação $f(x) = 0$, precisamos isolar a raiz procurada em um intervalo de forma que o valor de f tenha sinais trocados nos extremos do intervalo. Os demais métodos necessitam de uma aproximação inicial para a solução próxima à solução procurada. Assim, vamos iniciar o capítulo buscando intervalos que contenham uma única raiz da equação estudada, vamos chamar esse processo de isolar as raízes.

Teorema do Valor Intermediário (T.V.I.) Suponha que f seja uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Se y_0 for um valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um $x_0 \in]a,b[$, tal que $f(x_0) = y_0$.

Em particular ao (T.V.I), quando $y_0 = 0$, temos o **Teorema de Bolzano**, que diz que se uma função for contínua em um determinado intervalo $[a,b]$, e haja troca de sinal na imagem nesse intervalo, por exemplo, $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$, é garantida pelo menos uma raiz x^* em $]a,b[$.

Exemplo 25. Aplique o Teorema do Valor intermediário para verificar o intervalo para isolar os zeros da função $f(x) = \ln(x) - \cos(x)$.

Primeiro observamos que f é contínua para todo $x > 0$. Analisando o sinal da f para vários valores de x, encontramos que f troca de sinal no intervalo $[1,2]$. De fato, $f(1) = -0,5403 < 0$ e $f(2) = 1,1093 > 0$. Logo, concluímos que existe pelo menos uma raiz em $]1,2[$.

Podemos incluir uma análise gráfica, conforme, encontrada na referência (FRANCO, 2006), construindo os gráficos das funções $g(x) = \ln(x)$ e $h(x) = \cos(x)$ em um mesmo plano cartesiano, Figura 20. Na intersecção desses gráficos, $g(x^*) = h(x^*) \Rightarrow \ln(x^*) = \cos(x^*) \Rightarrow \ln(x^*) - \cos(x^*) = 0$ e, portanto, $f(x^*) = 0$.

Não há a necessidade de se plotar os gráficos em softwares, daí a importância de se conhecer o comportamento de cada função para a aplicação dos métodos numéricos.

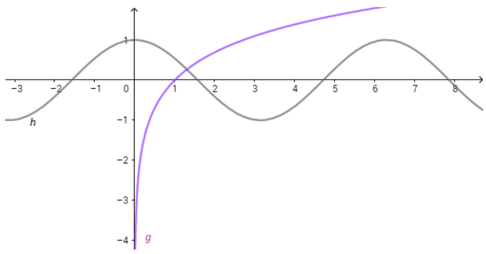


Figura 20 – Gráfico das funções $g(x) = \ln(x)$ e $h(x) = \cos(x)$.

Os resultados acima mostram que a função f possui um único zero e ele está isolado em $]1,2[$.

Exemplo 26. Isole a menor raiz positiva de $\cos(x) = x$.

Os pontos de intersecção dos gráficos da $g(x) = \cos(x)$ e da $h(x) = x$, Figura 21, são as raízes da equação $\cos(x) = x$.

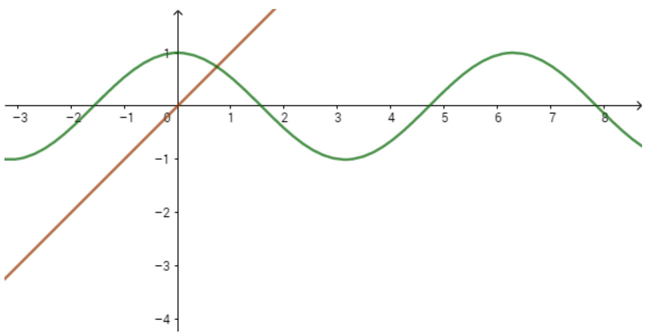


Figura 21 – Gráfico das funções $g(x) = \cos(x)$ e $h(x) = x$.

Pelo T.V.I., seja $f(x) = \cos(x) - x$, $h(0) = 1 > 0$ e $h(1) = -0,4597 < 0$.

Unindo os resultados da análise gráfica com o do T.V.I., concluímos que a equação $\cos(x) = x$ raiz no intervalo $]0,1[$.

Exemplo 27. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{(x^2-2)} - 1$. Isole todas as suas raízes.

Primeiramente manipulamos essa equação e ficamos com $(x+1)^2 = \frac{1}{e^{(x^2-2)}}$.

Fazemos de $g(x) = (x+1)^2$ e $h(x) = \frac{1}{e^{(x^2-2)}}$. Plotando os gráficos da $g(x)$ e da $h(x)$ em um mesmo plano, obtemos a Figura 22.

Na intersecção das curvas, temos os pontos x^*onde as duas funções são iguais, ou seja, $g(x^*) = h(x^*)$. Esta equação é equivalente a $\frac{g(x^*)}{h(x^*)} = 1$, ou ainda, $g(x^*)[h(x^*)]^{-1} - 1 = 0$.

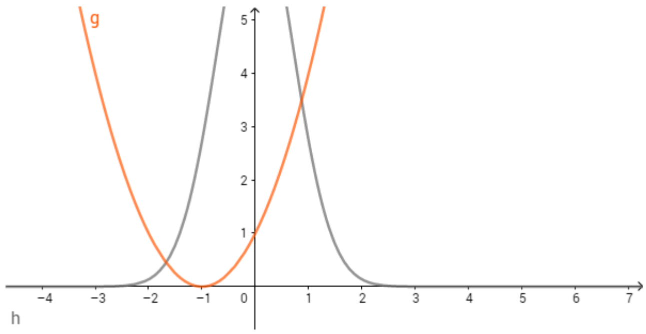


Figura 22 – Gráfico das funções $g(x) = (x+1)^2$ e $h(x) = \frac{1}{e^{(x^2-2)}}$.

Em seguida, calculamos alguns valores da f, Tabela 2, para os quais observamos troca de sinal nos intervalos $]-2,-1[$ e $]0,1[$ e, além disso, que os valores estão crescendo quando $x < -2$ e $x > 2$, de forma que eles não voltarão a diminuir.

Tabela 2 – Valores para x e $f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{(x^2)-2} - 1$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4385,5	6,4	-1,0	-0,9	0,5	65,5	17545,1

Assim, com base na Figura 22 e na Tabela 2, a função possui exatamente dois zeros e eles estão isolados em $]-2,-1[$ e $]0,1[$.

4.2 O Método da Bissecção

O Método da Bissecção é baseado no Teorema do valor intermediário e consiste em, partindo de um intervalo inicial $[a,b]$ com $x^* \in [a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$, determinar uma sequência de intervalos $[r_i, s_i]$, $i = 0,1,2,...$ onde $r_0 = a$ e $s_0 = b$, de forma que a amplitude do intervalo numa iteração é a metade da amplitude do intervalo anterior e que sempre contenha a raiz x^*. A Figura 23 mostra um ponto x^* solução de uma equação situado em um intervalo $]a,b[$.

A sequência de intervalos é calculada até que a amplitude do intervalo seja menor que a tolerância ε preestabelecida.

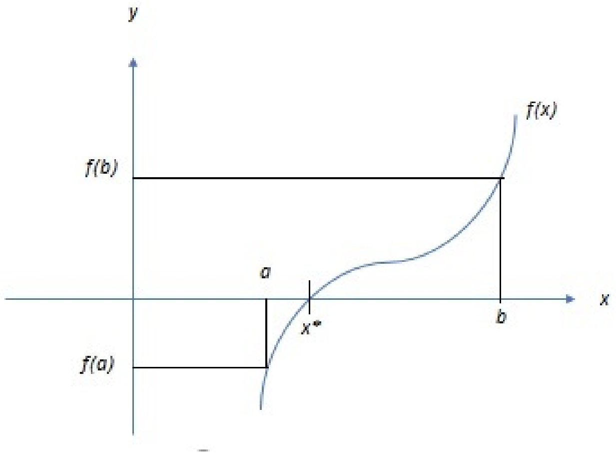


Figura 23 – Interpretação geométrica do Método da Bissecção - primeiro intervalo.

As sequências r_i, s_i e x_i são construídas da seguinte maneira (ARENALES; DAREZZO, 2008):

a. Determine um intervalo inicial $[r_i, s_i]$, de forma que $f(r_0)f(s_0) < 0$.

b. Calcule $x_i = (r_i + s_i)/2$, ponto médio do intervalo.

c. Se $f(x_i) = 0$, então x_i é uma raiz de $f(x)$.

d. Se $f(r_i)f(s_i) < 0$, então $r_{i+1} = r_i$ e $s_{i+1} = x_i$.

e. Se $f(r_i)f(s_i) > 0$, então $r_{i+1} = x_i$ e $s_{i+1} = s_i$.

Podemos representar graficamente conforme mostra a Figura 24.

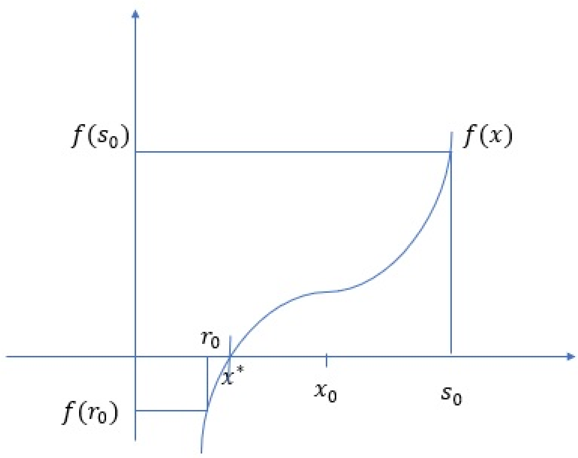


Figura 24 – Interpretação geométrica do Método da Bissecção - segundo intervalo.

Para $i = 0$, temos:

$x_0 = \dfrac{r_0 + s_0}{2}$, ponto médio

Como $f(r_0)f(s_0) < 0$, tomamos:

$r_1 = r_0$ e $s_1 = x_0$

Para $i = 1$, temos:

$x_1 = \dfrac{r_1 + s1}{2}$ ponto médio

Como $f(r_1)f(x_1) < 0$, tomamos:

$r_2 = x_1$ e $s_2 = s_1$

e, assim, sucessivamente até determinarmos a raiz x^* da equação com uma precisão ε desejada. Dizemos que um método numérico convergiu para a solução esperada, quando o erro que é pre-estabelecido fica inferior ao calculado. A aplicação do método pode divergir, caso, por exemplo, a solução não esteja no intervalo procurado. A demonstração matemática da convergência da sequência $\{x_k\}$ pode ser encontrada, por exemplo, em (ARENALES; DAREZZO, 2008).

É possível se estipular o número aproximado de iterações que deverão ser realizadas para que obtenha a solução x^* procurada de uma equação. Primeiramente, deve ser estipulado o intervalo no qual se deseja buscar a solução da equação, ou seja, deve se obter o valor de k, tal que $b_k - a_k < \varepsilon$. Após k iterações, a raiz estará contida no intervalo $[b_k, a_k]$.

$$b_k - a_k < \varepsilon \Rightarrow \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^k} < \varepsilon,$$

e assim por diante, até $\dfrac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon$.

Resolvendo, $\qquad b_0 - a_0 < \varepsilon \cdot 2^k$

$$2^k > \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}$$

$$log 2^k > log\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)$$

$$k \cdot log(2) > log(b_0 - a_0) - log\varepsilon$$

$$k > \frac{log(b_0 - a_0) - log\varepsilon}{log(2)} - 1, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{4.1}$$

Exemplo 28. Encontre a raiz da equação $x \cdot \log(x) - 1 = 0$, usando o método da bissecção com $\varepsilon = 0,05$.

Primeiramente consideramos as funções $g(x) = \log(x)$ e $h(x) = \dfrac{1}{x}$ de forma que quando $g(x) = h(x)$, $[h(x)]^{-1} g(x) - 1 = 0$. Os gráficos da g e da h estão plotados na Figura 25.

Note que $g(x)$ e $h(x)$ se cruzam no intervalo $]2, 3[$, e portanto deve-se buscar uma solução nesse intervalo. De fato, considerando $f(x) = x \cdot \log(x) - 1$, temos $f(2) = 2 \cdot \log(2) - 1 =$

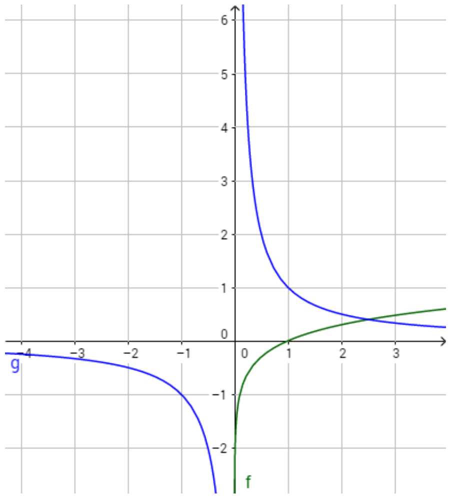


Figura 25 – Gráfico das funções $g(x) = \log(x)$ e $h(x) = \dfrac{1}{x}$.

$-0,3979 < 0$ e $f(3) = 3 \cdot \log(3) - 1 = 0,4314 > 0$. Logo, pelo T.V.I., existe pelo menos um zero da f neste intervalo.

A Tabela 3 mostra os intervalos a e b a cada iteração e o ε para determinar o momento de finalizar as iterações.

Tabela 3 – Valores de $g(x) = \log(x)$ e $h(x) = \dfrac{1}{x}$ com processo de parada.

k	s_k	r_k	x_k	$f(x_k)$	ε
0	2	3	$2,5$	$-5,14 \cdot 10^{-3}$	$0,2$
1	3	$2,5$	$2,75$	$0,2081$	$0,0909$
2	3	$2,75$	$2,625$	$0,100$	$0,04$

Como $0,04 < \varepsilon$ a equação convergiu e a solução procurada é $\bar{x} = 2,625$.

Exemplo 29. Usando o Método da Bissecção, determine uma solução da equação $x^2 + \ln(x) = 0$ com $\varepsilon = 0,01$.

Assumindo $g(x) = x^2$ e $h(x) = -\ln(x)$. Vamos determinar o número de iterações necessárias. Observamos pelo gráfico acima que a solução está no intervalo $]0,01;1[$, então:

$$k > \frac{\log(1 - 0,01) - log(0,01)}{\log(2)} \cong 7$$

Logo, deve-se iterar 7 vezes ao menos para se chegar ao resultado esperado.

A Tabela 4 mostra o processo iterativo para encontrar a solução da equação $x^2 + \ln(x) = 0$ com $\varepsilon = 0,01$.

Logo, a solução aproximada é $\bar{x} = x_7 = 0,640350625$.

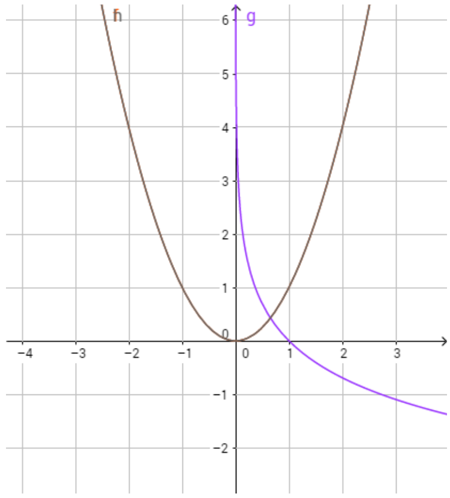


Figura 26 – Gráfico das funções $g(x) = x^2$ e $h(x) = -\ln(x)$

Tabela 4 – Método da Bissecção para solução da equação $y_1 = x^2$ e $y_2 = -\ln(x)$.

k	s_k	r_k	x_k	$f(x_k)$	ε
0	$0,01$	1	$0,505$	$-0,4281$	$0,9801$
1	$0,505$	1	$0,7525$	$0,2819$	$0,3289$
2	$0,505$	$0,7525$	$0,62875$	$-0,0687$	$0,1968$
3	$0,62875$	$0,7525$	$0,690625$	$0,106804$	$0,0895$
4	$0,62875$	$0,690625$	$0,659685$	$0,01919$	$0,0469$
5	$0,62875$	$0,659685$	$0,6442175$	$0,02470$	$0,0285$
6	$0,62875$	$0,6442175$	$0,63648375$	$-0,04668$	$0,01215$
7	$0,63648375$	$0,6442175$	$0,640350625$	$-0,036590$	$6,038 \cdot 10^{-3}$

4.3 O Método de Newton

O Método de Newton é um método iterativo que parte de uma aproximação inicial, x_0, para a solução, x^*, e por meio do processo iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, \ldots, \tag{4.2}$$

determina-se uma sequência de aproximações para a solução $\{x_{k+1}\}$.

A dedução do Método de Newton pode ser feita com base em sua interpretação geométrica, ilustrada na Figura 27. Dada uma função $f(x)$ qualquer, marca-se no eixo das abcissas um valor x_0, traça-se a reta tangente a f no ponto $(x_0, f(x_0))$ e, na intersecção da reta tangente com o eixo x marca-se o ponto x_1. Repetimos o processo, traçando a a reta tangente a f no ponto $(x_1, f(x_1))$ e, na intersecção da reta tangente com o eixo x marca-se o ponto x_2. E assim por diante.

De forma mais detalhada, partimos da equação da reta tangente que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e tem inclinação $f'(x_0)$,

$$(y - f(x_0)) = f'(x_0)(x - x_0).$$

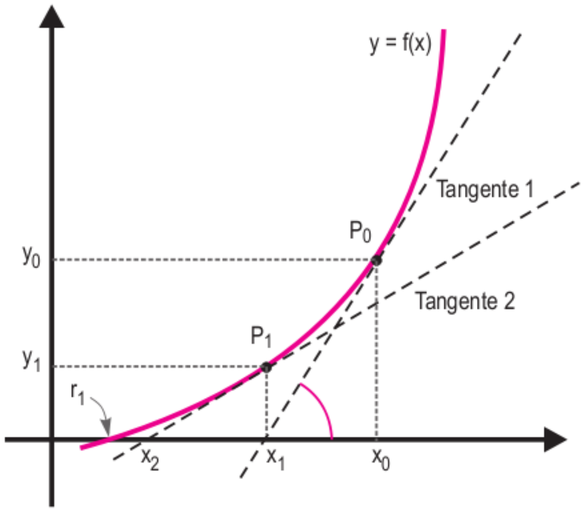


Figura 27 – Interpretação Geométrica do Método de Newton.

No ponto de intersecção dessa reta com o eixo x, $y = 0$, e denominamos a abscissa desse ponto de x_1. Assim,

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Logo, $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Agora, a equação da reta tangente que passa pelo ponto $(x_1, f(x_1))$ e tem inclinação $f'(x_1)$,

$$(y - f(x_1)) = f'(x_1)(x - x_1).$$

No ponto de intersecção dessa reta com o eixo x, $y = 0$, e denominamos a abscissa desse ponto de x_2. Assim,

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Logo, $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

Generalizando o processo, obtemos a Eq. (4.2).

Convergência

Para garantir a convergência do Método de Newton, precisamos tomar sempre x_0 suficientemente próximo da raiz procurada. Este resultado vem de um teorema de ponto fixo que pode ser encontrado em alguns livros de Cálculo Numérico como (FRANCO, 2006) ou livros de Análise Numérica (BURDEN; FAIRES, 2006). Resumidamente, a função f precisa ser contínua em uma vizinhança próxima da raiz, f' e f'' precisam existir e serem contínuas nesse intervalo e $f'(x) \neq 0$, para todo x no intervalo.

Este é o método mais popular na obtenção de raízes de equações não lineares, principalmente porque, caso convirja para a solução procurada, a convergência é muito rápida.

A ordem de convergência mede a velocidade de convergência de um método numérico e é definida da seguinte forma.

Definição 12. Seja x_k o resultado da aplicação de um método numérico na k-ésima iteração e $e_k = x_k - x^*$ seu erro. Se existir um número $p \geq 1$ e uma constante $c > 0$ tais que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = c, \tag{4.3}$$

então p é chamada de ordem de convergência desse método e c é a constante assintótica do erro.

Caso as condições para convergência estejam garantidas, a ordem de convergência do Método de Newton é quadrática, ou seja, $p = 2$ em (4.3). Dessa forma, a cada iteração, o erro diminui, a partir de um valor de k, na seguinte proporção: $|e_{k+1}| \approx c|e_k|^p$.

Teste de parada

Na prática, devemos parar o processo iterativo (4.2) quando a solução atingir uma precisão desejada ε.

Alguns possíveis testes são

$$\text{Valor absoluto da } f: \qquad |f(x_{k+1})| < \varepsilon; \tag{4.4}$$

$$\text{Erro absoluto:} \qquad |x_{k+1} - x_k| < \varepsilon; \tag{4.5}$$

$$\text{Erro relativo:} \qquad \frac{|x_{k+1} - x_k|}{|x_{k+1}|} < \varepsilon. \tag{4.6}$$

A cada nova aproximação x_{k+1} encontrada, realizamos um dos testes acima. Quando o teste for satisfeito, tomamos como aproximação para a solução o valor $x^* \approx x_{k+1}$.

Adotaremos nesse trabalho como processo de parada o erro relativo, observando que ele não pode ser aplicado quando a solução for próxima de 0.

Exemplo 30. Determinar, usando o método de Newton, a menor raiz positiva da equação $4\cos(x) - e^x = 0$, com $\varepsilon < 0,01$.

Tomando $g(x) = 4\cos(x)$ e $h(x) = e^x$, observamos pela Figura 28 que a solução procurada está na região do número 1.

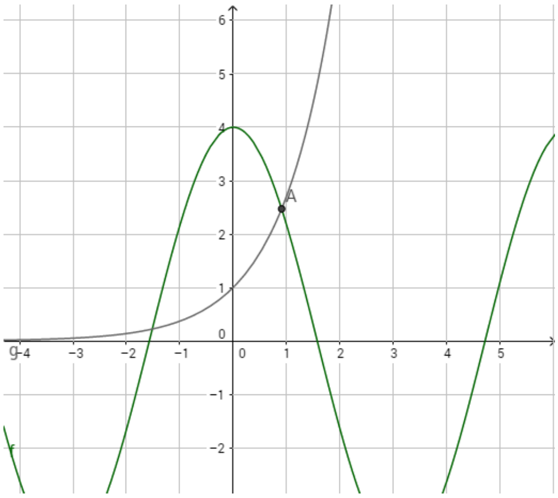


Figura 28 – $g(x) = 4\cos(x)$ e $h(x) = e^x$.

Tomemos então $x_0 = 1$. A função e sua derivada, respectivamente, $f(x) = 4cos(x) - e^x$ e $f'(x) = -4sen(x) - e^x$, e o processo iterativo fica

$$x_{k+1} = x_k - \frac{4cos(x_k - e^{x_k})}{-4sen(x_k - e^{x_k})}.$$

Começando por $x_0 = 0$, obtemos

$$x_1 = 0,9084 \text{ com erro relativo de } ER_1 = 0,10086 > \varepsilon$$

$$x_2 = 0,90479 \text{ com } ER_2 = 3,79 \cdot 10^{-3} < \varepsilon.$$

Logo, o processo convergiu e a solução aproximada é $\bar{x} = 0,90479$.

4.4 O Método das Secantes

Uma desvantagem para a utilização do método de Newton é a necessidade de se obter $f'(x)$, bem como calcular o valor numérico a cada passo. Uma maneira de eliminar essa desvantagem é substituir a derivada da função $f(x)$ no ponto k pelo quociente das diferenças. Note que $f'(x_k)$ é o limite da relação acima para $x_{k-1} \to x_k$.

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \tag{4.7}$$

Substituindo a equação acima no método de Newton, temos:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dfrac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Deste modo, colocando o segundo membro sobre o mesmo denominador, obtém-se o Método das Secantes, dado por

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4.8}$$

Assim, o Método das Secantes parte de duas aproximações iniciais para a solução: x_0 e x_1 e constrói uma sequência de aproximações para a solução $\{x_{k+1}\}$.

As condições para convergência do Método das Secantes são as mesmas que para o Método de Newton. Quanto à ordem de convergência, é um pouco menor, $\approx = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$. A prova pode ser encontrada em (OSTROWSKI, 1966).

Note que apesar do método das Secantes apresentar uma ordem de convergência inferior ao método de Newton, ele é uma alternativa viável, desde que o mesmo requer somente um cálculo para a função f por passo, enquanto que dois cálculos, $f(x_k)$ e $f'(x_k)$ são necessários para o Método de Newton.

Exemplo 31. Determinar a raiz positiva da equação $\sqrt{x} - 5e^{-x} = 0$ pelo método das secantes com erro inferior a 10^{-2}.

Sejam as funções que compõem a equação: $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = 5e^{-x}$, cujos gráficos estão na Figura 29.

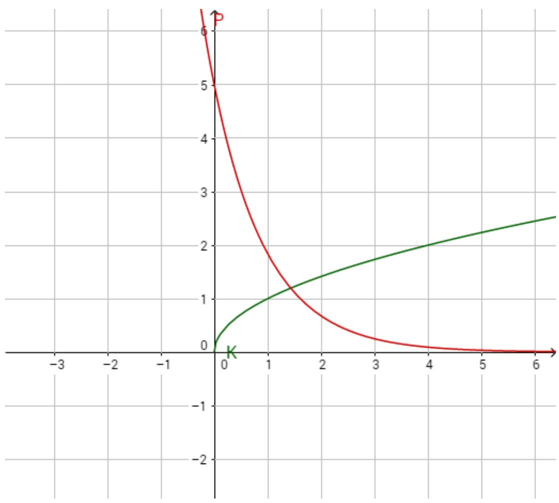


Figura 29 – Gráfico das funções $g(x) = \sqrt{x}$ e $h(x) = 5e^{-x}$

Por meio da Figura 29, nota-se que a solução procurada x^* está nas vizinhanças de $1,4$.

Logo, tomando $x_0 = 1,4$ e $x_1 = 1,5$, obtemos:

$f(x_0) = -0,052$ e $f(x_1) = 0,110$

$x_2 = \dfrac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1,432$, $ER_2 = 0,047 > \varepsilon$

$f(x_2) = 0,002$

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 1{,}431 \text{ , } ER_3 = 0{,}0007 < \varepsilon$$

Portanto, a solução aproximada é $\bar{x} = 1{,}431$.

Exemplo 32. Determinar, pelo Método das Secantes, uma raiz para a equação $\ln(x) - \cos(x) = 0$ com precisão de 10^{-3}.

No Exemplo 25, concluímos que essa equação tem uma única raiz, isolada no intervalo $]1,2[$. Assim, vamos tomar para aproximações iniciais, $x_0 = 1$ e $x_1 = 1{,}5$. Com isso, observando que $f(x) = \ln(x) - \cos(x)$, $f(x_0) = 0{,}3347$ e $f(x_1) = -0{,}5403$.

Pela Eq. (4.8),

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1{,}2609$$

O erro relativo é $ER_2 = 0{,}1896 > \varepsilon = 10^{-3}$.

Para segunda iteração, $f(x_2) = -0{,}0731$ e

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 1{,}3038 \text{com} ER_3 = 0{,}0329 > \varepsilon$$

Para a terceira iteração, $f(x_3) = 1{,}4476 \cdot 10^{-3}$

$$x_4 = \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 1{,}30296 \text{com} ER_4 = 6{,}44 \cdot 10^{-4} < \varepsilon$$

Portanto, $x^* \approx 1{,}30296$.

4.5 O Método do Ponto Fixo

O Método do Ponto Fixo é o mais antigo entre os métodos iterativos para zeros de funções. É bastante simples, não utiliza uma matemática sofisticada, e por isso pode ser trabalhado em salas de aula do Ensino Médio. Essa é a razão por termos optado por incluir este método neste texto.

A desvantagem do Método do Ponto Fixo é que não possui um processo iterativo pré-estabelecido. Podemos construir processos que convergem ou que divergem. As condições para garantir a convergência não são simples e dependem do problema a ser tratado. Elas vêm do mesmo teorema de convergência do Método de Newton e podem ser obtidas em, por exemplo, (FRANCO, 2006) ou (BURDEN; FAIRES, 2006).

Também conhecido por Método da Iteração Linear justamente por sua ordem de convergência ser linear, portanto, sua convergência é a mais lenta quando comparado com os Métodos de Newton e das Secantes.

A partir da equação $f(x) = 0$, isolamos uma variável x qualquer, e determinamos uma nova equação $x = g(x)$. Colocamos o x da esquerda na iteração $k+1$ e o x da direita na iteração

k, criando o seguinte processo iterativo:

$$x_{k+1} = g(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{4.9}$$

Começando de uma aproximação inicial x_0, o processo (4.9) gera uma sequência de aproximações para a solução. Uma vez encontrada a solução x^*, $g(x^*) = x^*$ (daí o nome ponto fixo) e, portanto, $f(x^*) = 0$ (ARENALES; DAREZZO, 2008).

Exemplo 33. Obtenha uma raiz de $x^3 - x - 1 = 0$ usando o Método do Ponto Fixo, iniciando por $x_0 = 1$ e parando quando duas respostas consecutivas tiverem concordância de 4 casas decimais.

Note como uma má escolha da função de iteração nos levará a divergência da solução.

1° tentativa:

De $x^3 - x - 1 = 0$, isolamos o x da parcela do meio, obtendo $x = x^3 - 1$ e, portanto, o processo iterativo

$$x_{k+1} = x_k^3 - 1$$

A sequência de aproximações para a solução encontrada é

$x_0 = 1$; $x_1 = 1^3 - 1 = 0$; $x_2 = 0^3 - 1 = -1$; $x_3 = (-1)^3 - 1 = -2$;

$x_4 = -7$; $x_5 = -344$; $x_6 = -40707585$

Claramente o processo divergiu.

1° tentativa: isolamos o x^3 e extraímos a raiz cúbica, $x = \sqrt[3]{1+x}$, de onde tiramos o processo iterativo

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{1+x_k}$$

Este processo gera a seguinte sequência de aproximações para a solução

$x_0 = 1$; $x_1 = \sqrt[3]{1+1} = 1,25992105$; $x_2 = \sqrt[3]{1+1,25992105}$;

$x_3 = 1,312293837$; $x_4 = 1,322353819$; $x_5 = 1,324268745$;

$x_6 = 1,324632625$; $x_7 = 1,324701749$; $x_8 = 1,32470174878$

Portanto, a solução procurada é $1,3247$.

Exemplo 34. Determine a raiz da equação $2^x = x^2$ menor que zero com $\varepsilon < 0,01$.

A função $f(x) = 2^x - x^2$ é contínua em todo seu domínio, logo aplicando o Teorema do Valor Intermediário, como $f(0) = 1$ e $f(-1) = -0,5$, existirá uma raiz no intervalo $[-1,0]$.

Isolando x, na expressão x^2, ficamos com $x_{k+1} = -\sqrt{2^{x_k}}$ que é a função iterativa que converge para a solução.

$x_1 = -\sqrt{2^{-1}}$ e $0,4142 > \varepsilon$; $x_2 = -0,7827$ e $0,096 > \varepsilon$; $x_3 = -0,7624$ e $0,02 > \varepsilon$

$x_4 = -0,7678$ e $0,007 < \varepsilon$, e portanto a equação convergiu.

Logo, a terceira solução da equação $2^x = x^2$ é aproximadamente $-0,7678$.

Quando os métodos numéricos convergem, eles encontram a solução tão precisa quanto queiramos. No entanto, necessitam de muitos cálculos repetitivos, que podem perfeitamente ser realizados pelo computador. No próximo capítulo, vamos ver alguns recursos computacionais que podem ser usados para esse fim.

CAPÍTULO

5

RECURSOS COMPUTACIONAIS NA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Neste capítulo aplicamos os métodos numéricos estudados no Capítulo 4 com auxílio de recursos computacionais. Exploramos o uso de calculadora, de planilha eletrônica e do software Maxima. O intuito é usar programas ou equipamentos de baixo custo ou gratuitos. Programas da rede Office, como é o caso do Excel são obtidos gratuitamente para professores e alunos da rede estadual de ensino. Calculadoras científicas estão custando na faixa de $R\$40,00$ e o software Maxima está disponível para *download* gratuitamente na Internet.

5.1 Calculadora cientifica

A calculadora é o recurso mais simples, mais barato e de mais fácil uso (GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2013). Neste trabalho usamos uma calculadora Casio $fx-82MS$ mas os comandos são semelhantes na maioria das calculadoras cientificas. A utilização está além de realizar as contas.Podemos automatizar os métodos de Newton e do Ponto Fixo de forma que apertando apenas o sinal de igual, conseguimos calcular os termos da sequência de aproximações para a solução da equação.

Para qualquer método, o primeiro passo é reiniciar todas as funções gravadas anteriormente na calculadora. Para isso, basta seguir a sequência de comandos abaixo.

```
Tecle a tecla SHIFT, em seguida tecle MODE, na sequência aperte o
número 3, e para finalizar, tecle duas vezes a tecla = "igual".
```

Para lidar com as equações trigonométricas, é preciso deixar a calculadora em radianos. Para as demais equações não faz diferença. Portanto, procure deixar a calculadora sempre em radianos. Para isso basta fazer o seguinte:

`Tecle MODE` $\rightarrow$ `MODE` $\rightarrow 2$.

Depois, escolhemos a quantidade de casas decimais que desejamos trabalhar. Para 4 casas decimais que utilizaremos nos exemplos, basta seguir os passos a seguir:

`MODE` $\rightarrow$ `MODE` $\rightarrow$ `MODE` $\rightarrow$ `FIX` $(1) \rightarrow$ `4`.

5.1.1 Método de Newton com auxílio de calculadora

Vamos explicar o processo de resolução com exemplos.

Exemplo 35. Determine, usando uma calculadora cientifica, a raiz positiva da equação $e^x + \ln(\text{sen}(x)) = 0$, com arredondamento na quarta casa decimal.

Consideramos a função $f(x) = e^x + \ln(\text{sen}(x))$, logo, sua derivada é $f'(x) = e^x + \dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$.

Como não temos x na calculadora, aplicamos a solução inicial na variável A ou em qualquer outra existente na calculadora, e aplicando a devemos digitar:

$$A - \frac{f(A)}{f'(A)} = A - \frac{e^A + \ln(\mathtt{sen}(A))}{e^A + \dfrac{\cos(A)}{\mathtt{sen}(A)}}.$$

Agora, atribui-se a variável A o valor inicial desejado, como neste caso é o número 1, digitamos o seguinte:

`1` $\rightarrow$ `SHIFT` $\rightarrow$ `STO (que é a tecla RCL em branco)` $\rightarrow$ `escolher a variável, que no caso é a letra` A.

Deve aparecer no visor da calculadora $1 \rightarrow A$ na parte superior e logo embaixo disso $1,0000$. Agora,

`aperte a tecla igual`

e pronto, sua variável A está gravada.

Para digitar a variável A, gravada na memória da calculadora, digite a tecla ALPHA antes. Isso sempre, pois como uma mesma tecla abriga mais de uma função, caso clique direto em A, irá aparecer simplesmente um traço $-$. A tecla ALPHA, que fica ao lado da tecla SHIFT. Digita-se então:

$A - ((eA + \ln(\mathtt{sen}A)) : (eA + (\cos A) : (\mathtt{sen}A)))$.

Obs: Para digitar e^A na calculadora, digita-se simplesmente eA já que a própria letra e indica exponencial. Para multiplicar um valor qualquer ao e, faz-se $k * e$, sendo k o valor desejado.

Feito o comando acima, obtém-se $x_1 = 0;2424$ e salva-se o valor encontrado na variável A seguindo os passos e isso grava por cima do valor gravado anteriormente, tornando esse valor

`SHIFT` $\rightarrow$ `STO` $\rightarrow A$,

o x_1. Agora não precisa mais ficar gravando, pois a calculadora fará isso automaticamente, bastando que se que a função irá convergir quando parar de mudar de valor.

```
aperte a tecla igual "=" repetidamente
```

A sequência de valores obtida é

$x_0 = 1; x_1 = 0,2424;$

$x_2 = 0,2711$; $x_3 = 0,2724; x_4 = 0,2724$

Como $x_3 = x_4$, a função convergiu.

Exemplo 36. Resolva a equação $x^{\log(x)} - \cos(x) - 1 = 0.$

A solução está em $[1,2]$. Digite o valor de x_0 que neste caso é $x_0 = 1$, e grave-o na calculadora, atribuindo uma variável.

`SHIFT` $\rightarrow$ `STO` $\rightarrow A$.

No visor da calculadora, será observado $1 \rightarrow A$.

$f(x_0) = x_0^{\log(x_0)} - \cos(x_0) - 1.$

$f'(x_0) = 2\log(x_0) \cdot x_0^{\log(x_0)-1} + \operatorname{sen}(x_0).$

Digita-se então:

$A - ((A^{\log(A)} - \cos(A) - 1)) : (2\log(A) \cdot A^{\log(A)-1} + \mathtt{sen}(A))$.

$x_0 = 1;$

$x_1 = 1,6421$

Armazene x_1.

`SHIFT` $\rightarrow$ `STO` $\rightarrow A$. `(a tela pisca).`

```
Pressione a tecla = repetidamente.
```

$x_0 = 1; x_1 = 1,6421; x_2 = 1,4994;$

$x_3 = 1,4974; x_4 = 1,4974.$

O método convergiu e a solução é $x_4 = 1,4974$.

5.1.2 Método do Ponto Fixo com auxílio de calculadora

Os comandos são análogos aos utilizado no Método de Newton. No entanto, no Método do Ponto Fixo precisamos escolher corretamente uma função iterativa que convirja para a solução.

Da mesma forma da seção anterior, o primeiro passo é limpar a memória da calculadora, e na sequência definir a quantidade de casas decimais que se deseja trabalhar. Esses passos podem ser consultados na Seção 5.1.

Exemplo 37. Obtenha a raiz de $x^3 - x - 1 = 0$ diretamente na calculadora cientifica com 4 casas decimais de acerto.

Na Seção 4.5 o exercício já foi resolvido, e a função iterativa é $x = \sqrt[3]{1+x}$.

Salvamos o valor inicial $x_0 = 1$ variável A na memória da calculadora e introduzimos a função iterativa:

$1 \rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ STO $\rightarrow A$.

Posteriormente, digita-se a função iterativa na calculadora.

$(A \quad + \quad 1)^{(1:3)}$ $=$ Lembrando de digitar a tecla ALPHA, sempre que for incluir a variável A.

O valor encontrado é $1,2599$ e devemos subscrever na variável A esse resultado, pegando esse resultado e fazendo o seguinte:

$1,2599 \rightarrow$ SHIFT $\rightarrow$ STO $\rightarrow A$ (a tela da calculadora piscará).

teclar $=$ até a função convergir.

Obtemos:

$x_0 = 1$; $x_1 = 1,2599$; $x_2 = 1,3123$;

$x_3 = 1,3224$; $x_4 = 1,3243$; $x_5 = 1,3246$

$x_6 = 1,3247$; $x_7 = 1,3247$.

O método convergiu e a solução é $x_7 = 1,3247$.

Exemplo 38. Resolva, usando o método do ponto fixo, a equação $cos(x) - 2x = 0$ com 4 casas decimais de acerto.

Seguindo os mesmos passos do Exemplo 37,

Salvamos o valor inicial $x_0 = 1$ variável A na memória da calculadora e introduzimos a função iterativa:

$1 \rightarrow$ `SHIFT` $\rightarrow$ `STO` $\rightarrow A$.

$cos(A) : 2 =$ `Lembrando de digitar a tecla ALPHA, sempre que for incluir a variável` A.

Digitamos a função iterativa na calculadora:

O valor encontrado, é $0,1218$ e devemos subscrever na variável A esse resultado, pegando esse resultado e fazendo o seguinte:

$1,2599 \rightarrow$ `SHIFT` $\rightarrow$ `STO` $\rightarrow A$ `( a tela da calculadora piscará).`

`teclar` $=$ `até a função convergir.`

Obtemos:

$x_0 = 1$; $x_1 = 0,1218$; $x_2 = 0,4963$;

$x_3 = 0,4397$;$x_4 = 0,4524$; $x_5 = 0,4497$;

$x_6 = 0,4503$;$x_7 = 0,4502$; $x_8 = 0,4502$

O método convergiu e a solução é $x_8 = 0,4502$, bem próxima da encontrada anteriormente.

Foi possível programar os Métodos de Newton e do Ponto Fixo na calculadora pois ambos utilizam apenas uma variável x_k para calcular x_{k+1}. Porém, isso não ocorre com o método das secantes que precisa de duas variáveis x_k e x_{k-1} para calcular x_{k+1}. Esse fato impossibilita a resolução de forma análoga à apresentada nas Seções 5.1 e 5.2 e foge do propósito de obtermos processos simples.

O Método do Ponto Fixo se mostrou bastante simples, por não precisar de uma função derivada, e promissor para uma atividade voltada para os alunos do Ensino Médio.

5.2 Planilha eletrônica

Planilhas eletrônicas também podem ser poderosas ferramentas na resolução de equações, usando-as na implementação de métodos numéricos.

Neste trabalho, usamos o Microsoft Excel 2016®, mas o experimento pode ser reproduzido em qualquer outro software de planilha eletrônica, como o BrOffice. O link para *download* é: https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/.

O Excel® é um software desenvolvido pela empresa Microsoft, amplamente usado por empresas na realização de operações financeiras. Essas planilhas são constituídas por células, organizadas em linhas e colunas. Observe que na Figura 30, a primeira linha mostra letras em ordem alfabética e na primeira coluna, os números em ordem crescente. Os espaços da planilha são chamados de células e nos referenciamos a eles pela letra de sua coluna e número de sua linha.

As planilhas eletrônicas realizam cálculos e criam gráficos. Uma de suas maiores vantagens é a *função arrastar* que consiste aplicar uma mesma fórmula para diversos valores anteriores obtendo novos valores. Na Figura 30 foi digitado o número 1 na célula $B2$. Na célula $B3$ foi digitado $= B2+1$. Após isso, foi colocado o cursor do sob a aresta inferior direta da célula e arrastou-se verticalmente de modo a se obter os novos valores seguindo os novos valores.

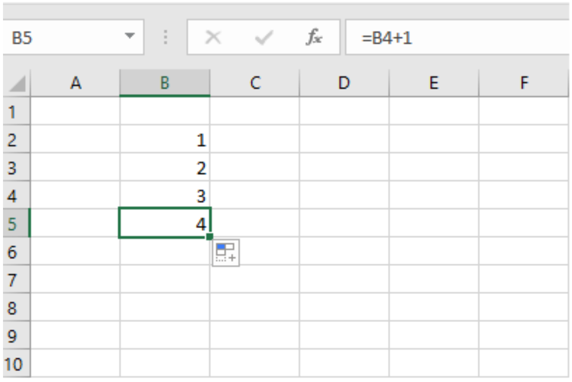


Figura 30 – Função arrastar no Microsoft Excel®.

Além disso, este programa possui várias fórmulas e funções matemáticas em sua biblioteca. Para digitar a função $f(x) = e^x$, por exemplo, basta que se digite em uma de suas células "$= exp(x)$". A função seno, $f(x) = \text{sen}(x)$ basta que se digite "$= sen(x)$".

Uma lista de funções reconhecidas pelo Excel pode ser encontrada no no seguinte site https://support.office.com/pt-br/article/Fun%C3%A7%C3%B5es-matem%C3%A1ticas-e-trigonom%C3%A9tricas-refer%C3%AAncia-ee158fd6-33be-42c9-9ae5-d635c3ae8c16.

Se ao invés de "x", digitar-se um valor, o excel retornará o valor da função desejado naquele valor.

As funções trigonométricas são programadas em radianos.

5.2.1 Método de Newton com auxílio de planilha eletrônica

Para iniciar o Método de Newton, vamos escrever na primeira linha da planilha, na coluna B "x_k", na coluna C "$f(x_k)$", na coluna D "$f'(x_k)$"na coluna E "x_{k+1}" e na coluna F "E" que representa o erro calculado. Na coluna A digitaremos a sequência de x_k obtida.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k	x_{k}	f(x_{k})	f'(x_{k})	x_{k+1}		E	
2	0							
3	1							
4	2							
5	3							
6	4							
7	5							
8	6							
9	7							
10								
11								

Figura 31 – Preparação da planilha para o Método de Newton.

Escolha um valor para x_0, próximo da solução procurada na célula $A2$. Aplique esse valor na função, trocando todas as incógnitas por $A2$ em $B2$ e repita o processo na função derivada $C2$, trocando as incógnitas por $A2$ também.

Em $B2$ digite a solução inicial. Em $C2$ aplique a fórmula da função, substituindo a incógnita por $B2$ que é o valor inicial da solução. Em $D2$, por sua vez, repita o processo feito em $C2$ porém, desta vez, com a derivada da função inicial. Em $E2$, aplica-se o método com os valores obtidos nas células anteriores citadas.

Para as demais células, basta arrastar verticalmente a 2ª linha da tabela que o preenchimento será automático.

O cálculo para o erro é efetuado a partir da segunda iteração. $F2$ permanecerá em branco, mas para $F3$ fazemos:

$$= ABS(E3 - E2)/ABS(E3).$$

Para os demais, basta arrastar a coluna. Ao observar o erro estipulado, o método é finalizado.

Observe como fica a resolução da Eq. (1.2) usando uma planilha eletrônica com um erro inferior a $0,01$ e na sequência veja outros exemplos.

Exemplo 39. Determine uma solução para a equação $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$ no intervalo $[2,3]$ com erro inferior a $0,001$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

	A	B	C	D	E	F	G
1		f(x)	f'(x)	Newton		erro	
2	1,41	0,173541066	-9,237855513	1,428786		0,013148	
3	1,428785861	-0,184136885	-11,68697033	1,41303		0,01115	
4	1,413030119	0,121849502	-9,577161169	1,425753		0,008924	
5	1,425753044	-0,119861994	-11,22934719	1,415079		0,007543	
6	1,415079049	0,085703025	-9,8173546	1,423809		0,006131	
7	1,423808796	-0,080104029	-10,95013381	1,416493		0,005164	
8	1,416493449	0,060165435	-9,988506689	1,422517		0,004234	
9							
10							

Figura 32 – Equação (1.2) usando planilha eletrônica e o Método de Newton.

Na célula $C2$ digitou-se $= B2^3 - 3 * B2^2 + 2 * B2 - 1$ e em $D2$ digitou-se $= 3 * B2^2 - 6 * B2 + 2$. Em $E2$ digitou-se $= B2 - (C2/D2)$ que é a implementação do método. Em $G3$, para o cálculo do erro, digitou-se $= ABS(E3 - E2)/ABS(E3)$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	k	x_{k}	f(x_{k})	f'(x_{k})	x_{k+1}		E		
2	0	2	-1	2	2,5				
3	1	2,5	0,875	5,75	2,347826				
4	2	2,347826	0,100682	4,449905	2,3252		0,009731		
5	3	2,3252	0,002058	4,268468	2,324718		0,000207		
6	4	2,324718	9,24E-07	4,264635	2,324718		9,32E-08		
7	5	2,324718	1,88E-13	4,264633	2,324718		1,89E-14		
8	6	2,324718	-8,9E-16	4,264633	2,324718		0		
9	7	2,324718	-8,9E-16	4,264633	2,324718				
10									

Figura 33 – Implementação no Excel para a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

Para a obtenção dos demais valores, seguimos o roteiro digitado acima.

Exemplo 40. Determine uma solução positiva para a equação $g(x) = \cos(x) - 2x^2$, com $\varepsilon < 0,001$.

$g(x) = \cos(x) - 2x^2$

$g'(x) = -\text{sen}(x) - 4x$

A resolução segue na imagem a seguir.

	A	B	C	D	E	F	G
1	k	x_{k}	f(x_{k})	f'(x_{k})	x_{k+1}		E
2	0	0,3	0,775336	-1,49552	0,818439		
3	1	0,818439	-0,65632	-4,00384	0,654515		0,250451
4	2	0,654515	-0,06344	-3,22684	0,634856		0,030967
5	3	0,634856	-0,00093	-3,13249	0,63456		0,000466
6	4	0,63456	-2,1E-07	-3,13106	0,63456		1,06E-07
7	5	0,63456	-1,1E-14	-3,13106	0,63456		5,42E-15
8	6	0,63456	0	-3,13106	0,63456		0
9	7	0,63456	0	-3,13106	0,63456		0
10							

Figura 34 – Implementação no Excel para a função $g(x) = \cos(x) - 2x^2$.

Primeiramente constatou-se que no intervalo $[0, 1]$ existia uma solução. Feito isso, foi atribuído o valor $0,3$ para x_0 em $B2$.

Em $C2$ foi digitada a função $= COS(B2) - 2 * B2^2$. Em $D2$ aplicou-se a derivada da função $= -SEN(B2) - 4 * B2$ e por fim em $E2$ aplicou-se o método de Newton $= B2 - (C2/D2)$.

A partir de $G3$ começou-se a calcular o erro $= ABS(E3 - E2)/ABS(E3)$. Seguindo os procedimentos já listados anteriormente, foi constatado que em $E5$ a função convergiu.

Vamos voltar ao problema de resolver a Eq. (1.2), repetida aqui $e^x + \ln(\text{sen}(x)) = 0$, e determinar a primeira solução positiva para ela com um $\varepsilon < 0,01$ usando o Método de Newton.

A Figura 35 mostra o intervalo onde devemos buscar a solução da equação.

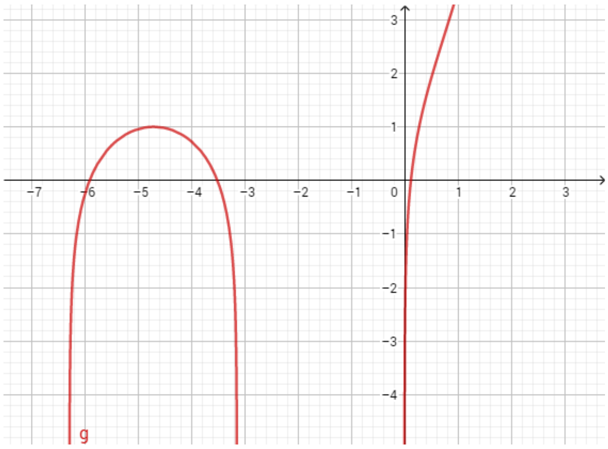


Figura 35 – Gráfico da função $f(x) = e^x + \ln(\text{sen}(x)) = 0$.

A solução procurada está no intervalo $[0,1;1]$. Considerando a função $f(x) = e^x + \ln(\text{sen}(x))$, sua derivada é a função $f'(x) = e^x + \dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$.

Assim, a solução da equação nos parâmetros estabelecidos é $x = 0,119488$ com um $\varepsilon = 7\cot e^{-5}$.

5.2.2 Método das Secantes com auxílio de planilha eletrônica

Semelhante ao Método de Newton, novamente cometamos a vantagem de não ter que calcular a função derivada, e isso faz com que o método possa ser aplicado para alunos de Ensino Médio. Para programá-lo na planilha eletrônica, precisamos adaptar as linhas conforme Figura 36.

Dada $f(x)$ para a qual desejamos descobrir os valores de x cuja a imagem pela f é nula, escrevemos a função. Em $A2$ coloque um valor próximo da solução e em $B2$ o outro extremo próximo a solução procurada, representando as soluções iniciais x_1 e x_2. Aplique em $C2$ a função, trocando a variável por $A2$, valor determinado (por exemplo, para $senx$, digite $= sen(A2)$, e faça o mesmo com x_2, trocando x por $= sen(B2)$). Aplique o método das secantes em $E2$, digitando:

$$= (A2 * D2 - B2 * C2)/(D2 - C2),$$

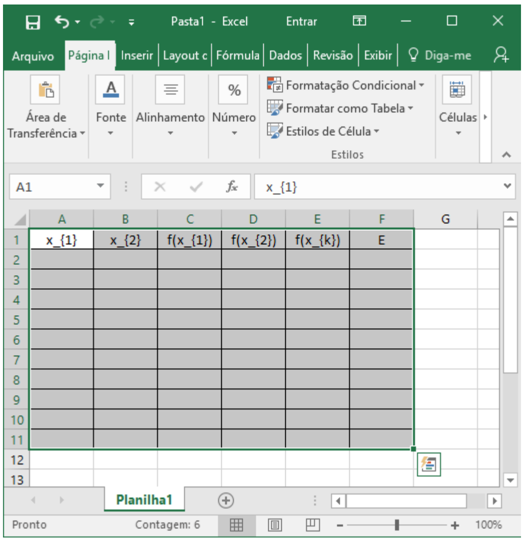


Figura 36 – Preparação da planilha para o Método das Secantes.

e tecle enter, que uma solução aparecerá.

Em $A3$, digite $= B2$. A célula receberá o valor de $B2$. Em $B3$, digite $= E2$, a célula receberá a solução $f(x_k)$ anterior.

Para calcular o erro, use a função ABS. O primeiro erro pode ser obtido por $= ABS(B2 - A2)/ABS(B2)$.

Para os demais $f(x_i)$, basta arrastar o cursor até o final da tabela. Faça o mesmo para os demais valores, $f(x_2), f(x_k)$ e E, arrastando sempre na vertical. Fazer isso também com os valores de x_1 e x_2, onde a cada nova iteração, novos x_1 e x_2 sendo criados. Ao alcançar o erro estipulado, o método terá convergido.

Exemplo 41. Determine uma raiz no intervalo $[1,3]$ para a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ e erro inferior a $0,01$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Método das secantes							
2	x1	x2	f(x1)	f(x2)	f(xk)		E	
3	1	3	-1	5	1,333333		0,666667	
4	3	1,333333	5	-1,2963	1,676471		1,25	
5	1,333333	1,676471	-1,296296	-1,36691	-4,9659		0,204678	
6	1,676471	-4,9659	-1,366909	-207,373	1,720545		1,337596	
7	-4,9659	1,720545	-207,3726	-1,34645	1,764243		3,886239	
8	1,720545	1,764243	-1,346449	-1,31787	3,779577		0,024769	
9	1,764243	3,779577	-1,317874	17,69558	1,903931		0,533217	
10	3,779577	1,903931	17,69558	-1,16534	2,019819		0,985144	
11	1,903931	2,019819	-1,165337	-0,95917	2,558994		0,057376	
12	2,019819	2,558994	-0,959175	1,230081	2,256047		0,210698	
13	2,558994	2,256047	1,230081	-0,27444	2,311307		0,134282	
14	2,256047	2,311307	-0,274439	-0,05648	2,325627		0,023909	
15	2,311307	2,325627	-0,056478	0,003879	2,324707		0,006157	
16	2,325627	2,324707	0,003879	-4,9E-05	2,324718		0,000396	
17	2,324707	2,324718	-4,88E-05	-4,1E-08	2,324718		4,92E-06	
18								

Figura 37 – $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ por planilhas.

Aparecerá um sinal de "soma" que é o onde deve-se arrastar a coluna. Deve-se arrastar isso em todas as colunas da planilha, após o cálculo da primeira linha. Ao se arrastar, a fórmula aplicada será levada para as demais linhas.

A programação aqui foi feita em $C3$ e foi $= (A3^3 - 3*A3^2 + 2*A3 - 1)$, já que $A3$ recebe valor de x_1. Em $D3$, programou-se $= (B3^3 - 3*B3^2 + 2*B3 - 1)$, já que $B3$ recebe o valor de x_2. Em $E3$, aplicamos o método, de modo a se digitar ,$= (A3*D3 - B3*C3)/(D3 - C3)$. Por fim, em $G3$, digita-se $= ABS(B3 - A3)/ABS(B3)$. O novo x_1 será o x_2 da iteração anterior, e o novo x_2 é o valor $f(x_k)$ anterior.

Neste exemplo, a solução é obtida com $x = 2,324706504$ com um erro $\varepsilon = 0,006157136$

Exemplo 42. Determine um zero para a função $g(x) = \cos(x) - 2x^2$, no intervalo $[0,1]$ e erro inferior a $0,001$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		x1	x2	f(x1)	f(x2)	f(xk)		E	
2		0	1	1	-1,4597	0,406554		1	
3		1	0,406554	-1,4597	0,587917	0,576946		1,459698	
4		0,406554	0,576946	0,587917	0,172399	0,647642		0,295334	
5		0,576946	0,647642	0,172399	-0,04137	0,63396		0,109159	
6		0,647642	0,63396	-0,04137	0,001878	0,634554		0,021582	
7		0,63396	0,634554	0,001878	1,87E-05	0,63456		0,000936	
8		0,634554	0,63456	1,87E-05	-8,6E-09	0,63456		9,4E-06	
9		0,63456	0,63456	-8,6E-09	3,95E-14	0,63456		4,33E-09	
10		0,63456	0,63456	3,95E-14	0	0,63456		1,98E-14	
11		0,63456	0,63456	0	0	#DIV/0!		0	
12		0,63456	#DIV/0!	0	#DIV/0!	#DIV/0!		#DIV/0!	
13		#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		#DIV/0!	
14		#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		#DIV/0!	
15		#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		#DIV/0!	
16		#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		#DIV/0!	

Figura 38 – $f(x) = \cos(x) - 2x^2$

Neste exemplo, a solução encontrada foi $0,634559948$ e o erro foi de $0,000936086$.

Note que a partir de certo ponto, a programação efetuada para de rodar, e isso pois não existe divisão por zero.

Exemplo 43. Encontre uma solução para a equação $\cos(\mathrm{sen}(x)) - \ln(x) = 0$ no intervalo $[1,2]$, com $\varepsilon < 0,01$.

Aplicado o método, temos :

$A39 = 1$; $B39 = 2$; $C39 = COS(SEN(A39)) - LN(A39)$; $D39 = COS(SEN(B39)) - LN(B39)$ e em $E39$ que é onde aplicamos o método, digitamos $= (A39*D39 - B39*C39)/(D39 - C39)$.

Em $G39$ foi inserida a fórmula para cálculo do erro, que é $= ABS(B39 - A39)/ABS(B39)$.

Na linha abaixo a linha 39, o método usado foi similar ao que foi feito nos exemplos anteriores.

O resultado obtido foi $1,736285095$ com um erro $\varepsilon = 0,001410302$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		x1	x2	f(x1)	f(x2)	f(xk)		E	
2		1	2	0,666367	-0,07885	1,894196		0,5	
3		2	1,894196	-0,07885	-0,05562	1,640894		0,055857	
4		1,894196	1,640894	-0,05562	0,047126	1,757079		0,154368	
5		1,640894	1,757079	0,047126	-0,00887	1,738667		0,066124	
6		1,757079	1,738667	-0,00887	-0,00104	1,736219		0,010589	
7		1,738667	1,736219	-0,00104	2,89E-05	1,736285		0,00141	
8		1,736219	1,736285	2,89E-05	-9E-08	1,736285		3,81E-05	
9		1,736285	1,736285	-9E-08	-7,7E-12	1,736285		1,18E-07	
10		1,736285	1,736285	-7,7E-12	0	1,736285		1,01E-11	
11		1,736285	1,736285	0	0	#DIV/0!		0	
12		1,736285	#DIV/0!	0	#DIV/0!	#DIV/0!		#DIV/0!	
13		#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		#DIV/0!	
14		#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		#DIV/0!	
15		#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		#DIV/0!	
16		#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!		#DIV/0!	

Figura 39 – $\cos(\text{sen}(x)) - \ln(x) = 0$

5.2.3 Método do Ponto fixo com auxílio de planilha eletrônica

Para a aplicação do método do ponto fixo em uma planilha eletrônica, o primeiro passo é descrever a equação e encontrar a função iterativa $g(x)$ que vem da própria equação.

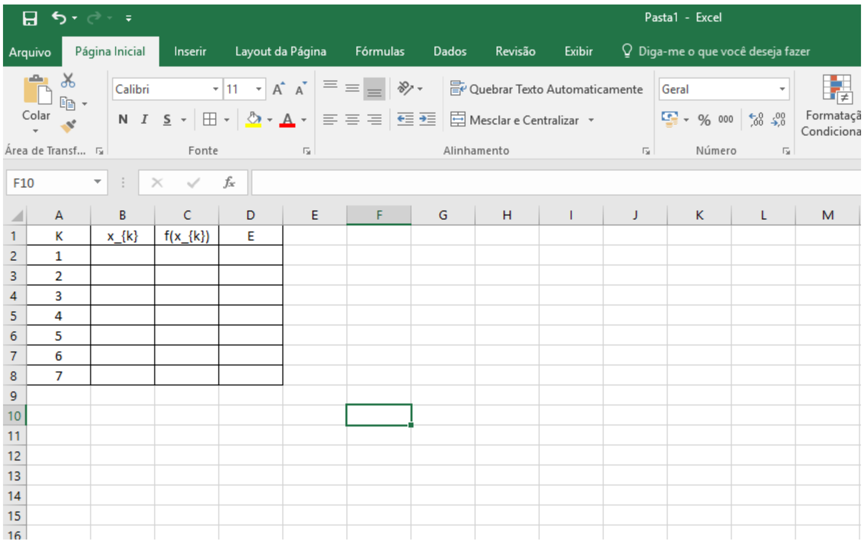


Figura 40 – Preparação da planilha para o Método do Ponto Fixo.

Escolha um x_k próximo da solução procurada e o digite em $B2$. Aplique $B2$ na função iterativa em $C2$.

Para o cálculo do erro, digite $= ABS(C2 - B2)/ABS(C2)$.

Agora basta arrastar verticalmente os valores de x_k, $f(x_k)$ e E, onde E é o erro.

Finaliza-se ao chegar ao erro estipulado.

Exemplo 44. Usando o método do ponto fixo em uma planilha eletrônica com um erro inferior a $0,01$ determine uma raiz no intervalo $[2,3]$ para a equação $\cos(\text{sen}(x)) - \ln(x) = 0$.

A função iterativa será $e^{(\cos(\text{sen}(x))} = x$

Em $C2$ digita-se $1,3$ e em $D2$ foi aplicada a fórmula $= EXP(COS(SEN(C2)))$.

Para o erro, usou-se a fórmula $= EXP(COS(SEN(C2)))$ em $F2$.

	A	B	C	D	E	F	G
1		k=	xk	f(xk)		E	
2		1	1,3	1,769331		0,265259	
3		2	1,769331	1,744951		0,013972	
4		3	1,744951	1,738406		0,003765	
5		4	1,738406	1,736794		0,000928	
6		5	1,736794	1,736407		0,000223	
7		6	1,736407	1,736314		5,33E-05	
8		7	1,736314	1,736292		1,27E-05	
9		8	1,736292	1,736287		3,04E-06	
10		9	1,736287	1,736285		7,25E-07	
11		10	1,736285	1,736285		1,73E-07	
12		11	1,736285	1,736285		4,12E-08	

Figura 41 – $\cos(\mathrm{sen}(x)) - \ln(x) = 0$: Método do Ponto Fixo.

Para a célula $C3$, digitou-se $= D2$ e para a aplicação do método nas demais células, arrasta-se verticalmente o cursor até que seja observado o erro desejado.

5.2.4 Método da Bissecção com auxílio de planilha eletrônica

Assim como todos os demais métodos numéricos, é possível realizar a implementação do Método da Bissecção também em planilhas eletrônicas.

Primeiramente, deve-se conhecer a função que será trabalhada e o intervalo $[a, b]$ onde se busca a solução. Na sequência, para esse método é necessário se determinar a média que chamaremos de x.

Numa célula seguinte, calculamos $f(a)$, em outra $f(b)$ e em outra $f(x)$. Por fim, determina-se um dos critérios de convergência a aplica-se, para este método, vamos aplicar aqui o que calcula o comprimento do intervalo, ou seja, $b - a$. A coluna de k acima indica o número de iterações que foram realizadas.

Área de Transf... | Fonte | Alinhamento | Númer

F27

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	k	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	b-a			
2	1										
3	2										
4	3										
5	4										
6	5										
7	6										
8	7										
9	8										
10	9										
11	10										
12	11										
13	12										
14	13										
15	14										
16	15										

Figura 42 – Preparação da planilha para o Método da Bissecção.

Ao contrário dos demais, o Método da Bisseção trabalhará com operações condicionais. Na imagem acima temos em $B2$ o valor de a, $C2$ o valor de b, $D2$ o valor da média entre a e b recebendo a incógnita x. Aplicamos a função em a e obtemos $f(a)$ em $E2$ e fazemos o mesmo com b obtendo a função em b em $F2$, e ainda o mesmo procedimento com x em $G2$. O tamanho do intervalo calculado em $H2$. Feita a primeira linha, começa-se a trabalhar com os condicionais na linha seguinte.

Fazemos o valor de $f(a)$ para uma função qualquer, e para obter os demais valores, basta que arrastemos o cursor até $f(x)$, não há a necessidade de se aplicar a mesma fórmula toda hora, a planilha reconhecerá que você deseja efetuar o mesmo procedimento para b e x. Evidentemente, $b-a$ será $C2-B2$.

Tendo isso, agora teremos os critérios para a obtenção dos zeros da função no intervalo estudado. Usaremos a função "SE" da planilha para decidir qual intervalo tomar, o da esquerda ou o da direita, da seguite forma:

Se $f(a)\cdot f(x)<0$ então o valor procurado é o próprio a, senão, o valor será x. Na planilha, equivale a seguinte expressão digitada na célula $B3$:

$$=SE(E2*G2<0;B2;D2).$$

Se $f(b)\cdot f(x)<0$ então o valor procurado é o próprio b, senão, o valor será x. Na planilha, equivale a seguinte expressão digitada na célula $C3$:

$$=SE(F2*G2<0;C2;D2).$$

Para o próximo x, arraste verticalmente a coluna $D2$ até $D2$.

Selecione os valores de $f(a), f(b)$ e $f(x)$ da linha 1 para a linha 2 que automaticamente aparecerão os valores calculados respectivos aos novos $f(a), f(b)$ e $f(x)$.

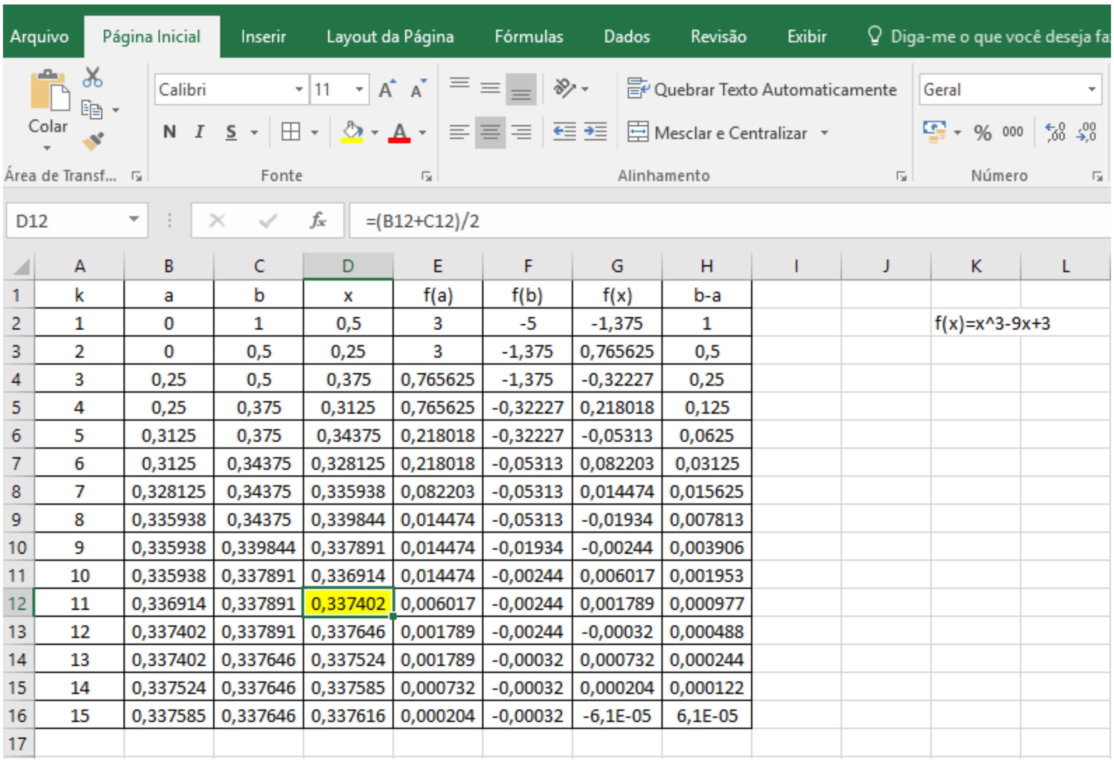
Feito isso, selecione a segunda linha totalmente e arraste até onde desejar. O processo termina quando for observado o erro estabelecido.

Exemplo 45. Determine a solução no intervalo $[0,1]$ para a equação $x^3-9x+3=0$ com erro inferior à $0,01$.

A planilha correspondente a este exemplo se encontra na Figura 43. A solução procurada é $x=0,337402$.

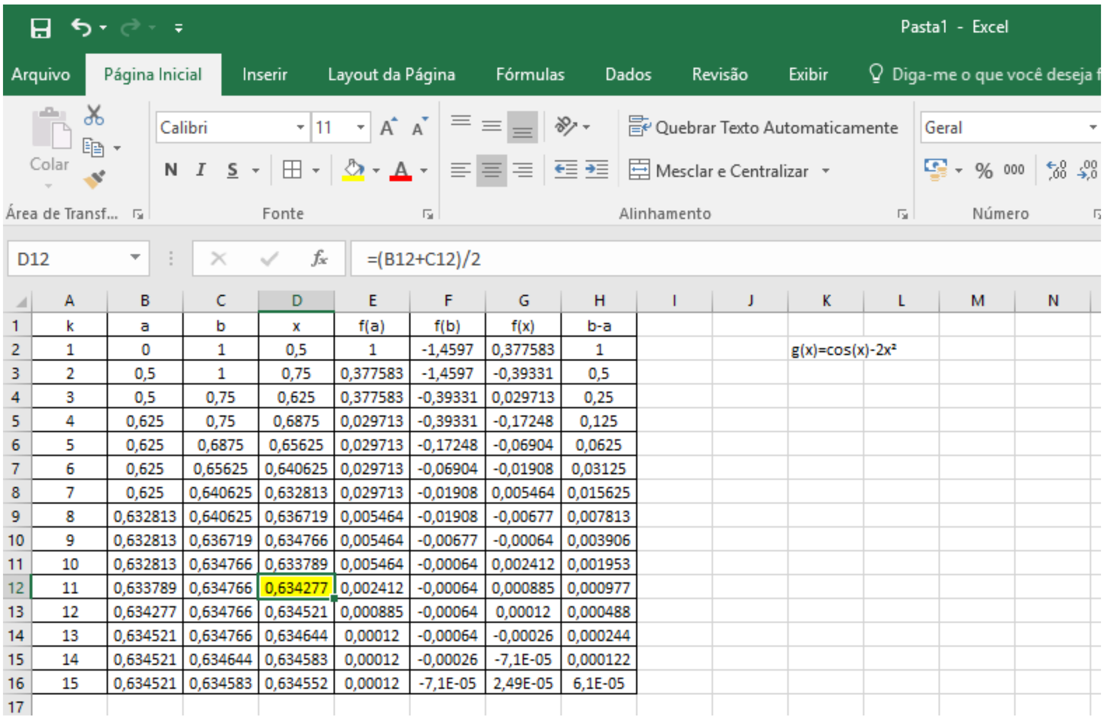
Exemplo 46. Determine a solução no intervalo $[0,1]$ para a equação $\cos(x)-2x^2=0$ com erro inferior à $0,01$.

A planilha correspondente a este exemplo se encontra na Figura 44. A solução procurada é $x=0,634277$.



k	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	b-a
1	0	1	0,5	3	-5	-1,375	1
2	0	0,5	0,25	3	-1,375	0,765625	0,5
3	0,25	0,5	0,375	0,765625	-1,375	-0,32227	0,25
4	0,25	0,375	0,3125	0,765625	-0,32227	0,218018	0,125
5	0,3125	0,375	0,34375	0,218018	-0,32227	-0,05313	0,0625
6	0,3125	0,34375	0,328125	0,218018	-0,05313	0,082203	0,03125
7	0,328125	0,34375	0,335938	0,082203	-0,05313	0,014474	0,015625
8	0,335938	0,34375	0,339844	0,014474	-0,05313	-0,01934	0,007813
9	0,335938	0,339844	0,337891	0,014474	-0,01934	-0,00244	0,003906
10	0,335938	0,337891	0,336914	0,014474	-0,00244	0,006017	0,001953
11	0,336914	0,337891	0,337402	0,006017	-0,00244	0,001789	0,000977
12	0,337402	0,337891	0,337646	0,001789	-0,00244	-0,00032	0,000488
13	0,337402	0,337646	0,337524	0,001789	-0,00032	0,000732	0,000244
14	0,337524	0,337646	0,337585	0,000732	-0,00032	0,000204	0,000122
15	0,337585	0,337646	0,337616	0,000204	-0,00032	-6,1E-05	6,1E-05

Figura 43 – $x^3 - 9x + 3 = 0$, Método da Bissecção.

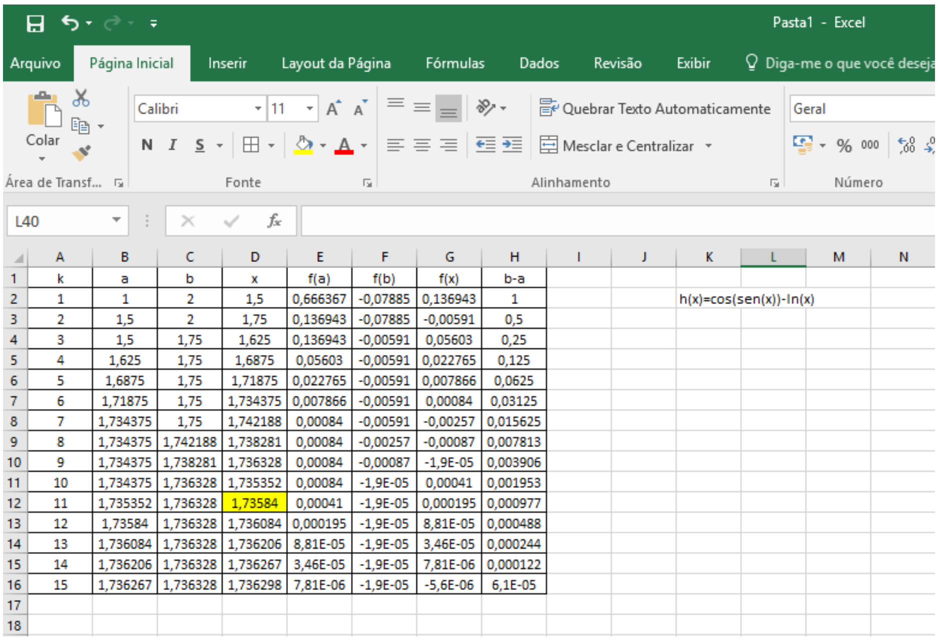


k	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	b-a
1	0	1	0,5	1	-1,4597	0,377583	1
2	0,5	1	0,75	0,377583	-1,4597	-0,39331	0,5
3	0,5	0,75	0,625	0,377583	-0,39331	0,029713	0,25
4	0,625	0,75	0,6875	0,029713	-0,39331	-0,17248	0,125
5	0,625	0,6875	0,65625	0,029713	-0,17248	-0,06904	0,0625
6	0,625	0,65625	0,640625	0,029713	-0,06904	-0,01908	0,03125
7	0,625	0,640625	0,632813	0,029713	-0,01908	0,005464	0,015625
8	0,632813	0,640625	0,636719	0,005464	-0,01908	-0,00677	0,007813
9	0,632813	0,636719	0,634766	0,005464	-0,00677	-0,00064	0,003906
10	0,632813	0,634766	0,633789	0,005464	-0,00064	0,002412	0,001953
11	0,633789	0,634766	0,634277	0,002412	-0,00064	0,000885	0,000977
12	0,634277	0,634766	0,634521	0,000885	-0,00064	0,00012	0,000488
13	0,634521	0,634766	0,634644	0,00012	-0,00064	-0,00026	0,000244
14	0,634521	0,634644	0,634583	0,00012	-0,00026	-7,1E-05	0,000122
15	0,634521	0,634583	0,634552	0,00012	-7,1E-05	2,49E-05	6,1E-05

Figura 44 – $\cos(x) - 2x^2 = 0$, Método da Bissecção.

Exemplo 47. Determine a solução no intervalo $[1,2]$ para a equação $\cos(\text{sen}(x)) - \ln(x) = 0$ com erro inferior à $0,01$.

A planilha correspondente a este exemplo se encontra na Figura 45. A solução procurada é $x = 1,73584$.



k	a	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	b-a
1	1	2	1,5	0,666367	-0,07885	0,136943	1
2	1,5	2	1,75	0,136943	-0,07885	-0,00591	0,5
3	1,5	1,75	1,625	0,136943	-0,00591	0,05603	0,25
4	1,625	1,75	1,6875	0,05603	-0,00591	0,022765	0,125
5	1,6875	1,75	1,71875	0,022765	-0,00591	0,007866	0,0625
6	1,71875	1,75	1,734375	0,007866	-0,00591	0,00084	0,03125
7	1,734375	1,75	1,742188	0,00084	-0,00591	-0,00257	0,015625
8	1,734375	1,742188	1,738281	0,00084	-0,00257	-0,00087	0,007813
9	1,734375	1,738281	1,736328	0,00084	-0,00087	-1,9E-05	0,003906
10	1,734375	1,736328	1,735352	0,00084	-1,9E-05	0,00041	0,001953
11	1,735352	1,736328	1,73584	0,00041	-1,9E-05	0,000195	0,000977
12	1,73584	1,736328	1,736084	0,000195	-1,9E-05	8,81E-05	0,000488
13	1,736084	1,736328	1,736206	8,81E-05	-1,9E-05	3,46E-05	0,000244
14	1,736206	1,736328	1,736267	3,46E-05	-1,9E-05	7,81E-06	0,000122
15	1,736267	1,736328	1,736298	7,81E-06	-1,9E-05	-5,6E-06	6,1E-05

Figura 45 – Resolução da equação $\cos(\text{sen}(x)) - \ln(x) = 0$ pelo Método da Bissecção.

Os métodos numéricos por si só, já ajudam na obtenção de soluções aproximadas para equações não lineares em um intervalo $[a,b]$, e com a ajuda dessas planilhas, acelerou-se a obtenção das soluções buscadas. Raramente se obtém a solução exata, mas é possível com elas uma solução tão próxima quanto se desejar para qualquer equação, quando a mesma obtiver solução no conjunto dos números reais.

5.3 Utilizado o WxMaxima para resolução de equações

O WxMaxima é um software matemático que efetua resoluções de equações diretamente em sua plataforma. Ele é capaz de efetuar tanto cálculos numéricos quanto simbólicos, e também é capaz de manipular expressões algébricas, derivar e integrar funções e ainda gerar vários tipos de gráficos, tudo em sua plataforma.

Ao abrir o software, a tela inicial é a mostrada na Figura 46:

Manuais de manuseio do programa e código fonte podem ser encontrados em

http://maxima.sourceforge.net. O programa está disponível para Windows e Linux.

Os operadores são:

$+$ para adição.

$-$ para subtração.

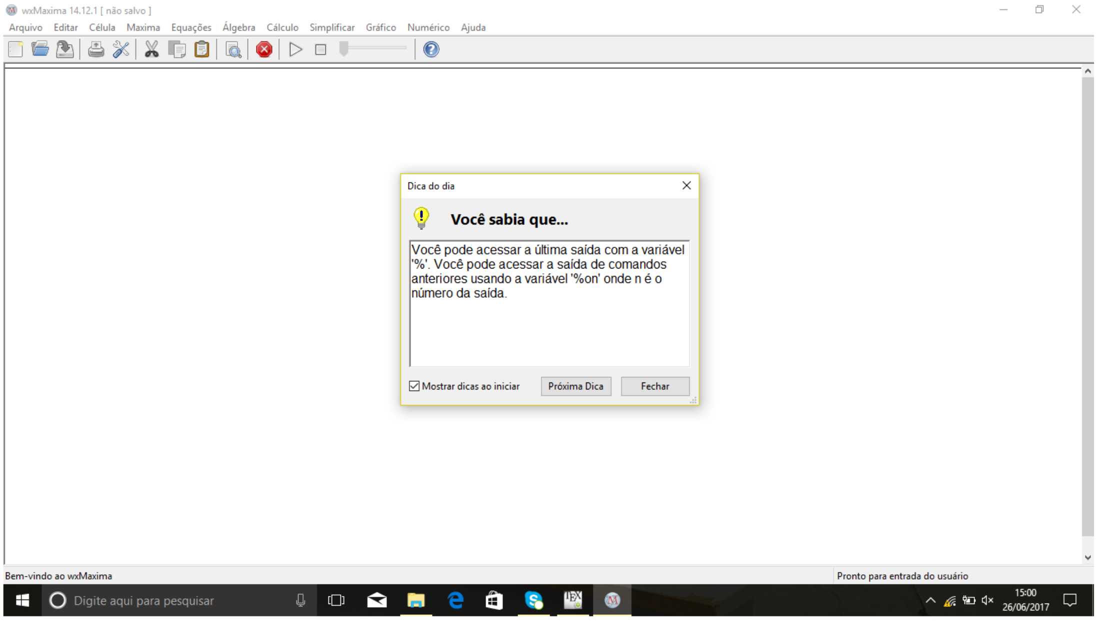


Figura 46 – Tela inicial do WxMaxima.

$*$ para multiplicação.

$/$ para divisão.

$\wedge$ ou $**$ para potenciação.

Para resolver equações de 1°, 2°, 3° ou 4°, basta seguir os seguintes passos:

Acima da barra de ferramentas, clique em **Equações** e na sequência em **Resolver**. Aparecerá a seguinte janela:

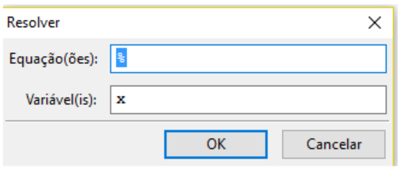


Figura 47 – Ferramenta Resolver do Maxima, para equações polinomiais até 4° grau.

Aonde se lê "Equação(ões)" digite a equação. Se a variável for x, não há necessidade de alterar nada ali.

Exemplo 48. Use o software WxMaxima para encontrar a solução da equação $x^2 - 4 = 0$.

Observe o esquema abaixo:

Feito isso, clique em OK que ele apresentará a seguinte tela:

Logo a solução dessa equação é $S = \{-2, 2\}$.

Obrigatoriamente deve se colocar o asterisco entre números e incógnitas para representação de multiplicação, caso contrário o programa retornará uma mensagem de erro.

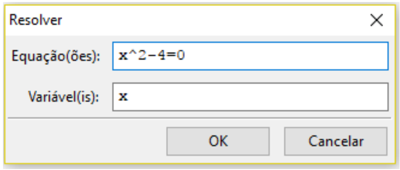


Figura 48 – Janela do Maxima com a equação $x^2 - 4 = 0$.

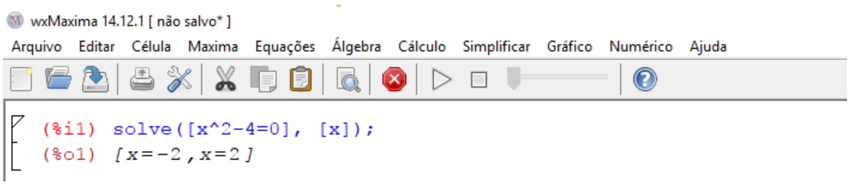


Figura 49 – Tela do Maxima com o comando e resposta da resolução da equação $x^2 - 4 = 0$.

Para determinar a solução de equações polinomiais de grau superior ao 4º grau deve-se seguir os seguintes passos:

Acima da barra de ferramentas, clique em **Equações** e na sequência em **Resolver (to poly)...**. Aparecerá uma janela idêntica a janela da imagem 47.

Digita-se a equação e na sequência, os resultados aparecem na tela, reais ou complexos.

Simples equações trigonométricas, como por exemplo $\text{sen}(x) = 0$ podem ser resolvidas seguindo o primeiro passo. Basta digitar na figura da imagem 47 a equação $sin(x) = 0$ que o programa fornecera uma solução. Porém ele retorna a seguinte mensagem.

"Some solutions will be lost", que significa que algumas soluções serão perdidas. Ele apresenta apenas uma solução dentre as infinitas existentes.

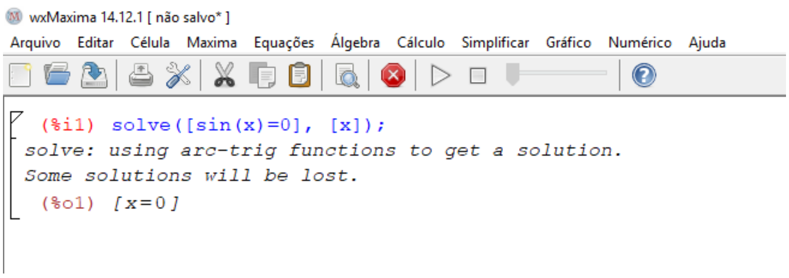


Figura 50 – Tela do Maxima mostrando a resolução da equação $\text{sen}(x) = 0$.

Caso se deseje encontrar a solução de uma equação com mais do que uma função trigonométrica, ou ainda, a junção com outro tipo de função, o programa não encontrará nessa aba. Outro tipo de procedimento deverá ser efetuado. Vá em encontrar raiz e coloque o intervalo onde se deseja buscar uma raiz, que o programa ira lhe fornecer todas as raízes obtidas naquele intervalo.

Exemplo 49. Encontre no Maxima a solução da equação $\text{sen}(x) - \cos(x) = 0$.

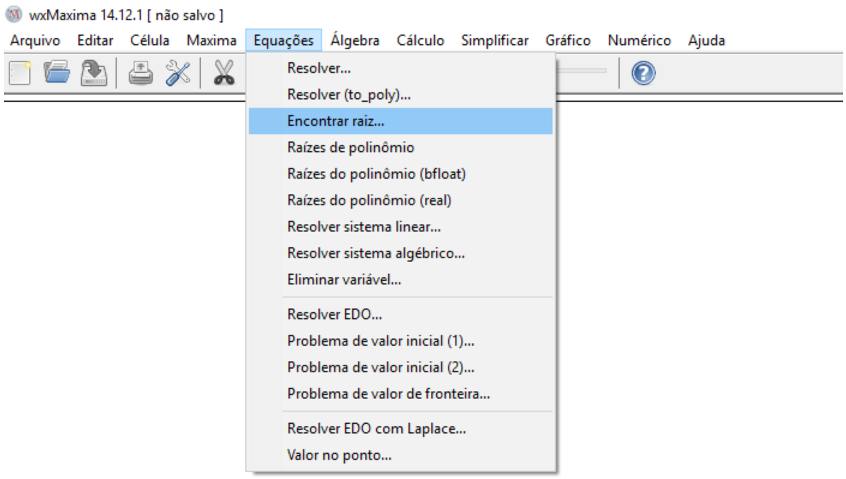


Figura 51 – Equacões trigonométicas no Maxima.

E, ao digitar a equação, a incógnita e a variável, conforme a próxima imagem, ele fornecerá as raízes obtidas na tela de saída.

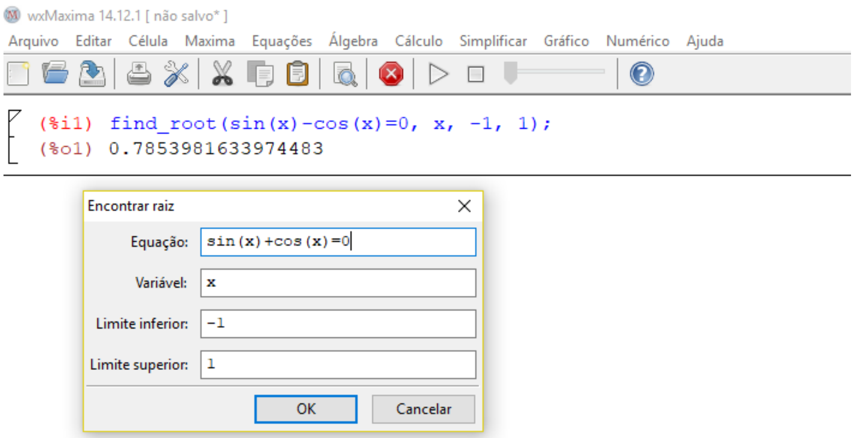


Figura 52 – Janela do Maxima com a equação $\text{sen}(x) - \cos(x) = 0$.

Para equações que misturam vários tipos de funções, o mesmo procedimento do anterior poderá ser usado. Na próxima imagem, algumas equações e suas soluções poderão ser vistas. O intervalo utilizado foi de -10 a 10 para todas elas. Caso haja a existência em outro intervalo o programa não a mostrará. No Anexo A mostra uma lista de funções matemáticas e como são reconhecidas pelo Maxima.

CAPÍTULO 6

UMA PROPOSTA DE APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Neste capítulo apresentamos uma proposta de aplicação do método do ponto fixo para alunos do ensino médio.

6.1 Plano de aula

TEMA: Aplicação do método do ponto (Iteração linear) no ensino médio.

OBJETIVO: Resolver equações por iterações sucessivas de modo a se determinar uma solução tão próxima da real quanto se queira, a menos de um erro pré-estabelecido.

Também se deseja fazer com que o aluno tenha uma melhor familiaridade com calculadoras científicas e planilhas eletrônicas.

CONTEÚDOS:

- Primeiramente uma breve abordagem do método do ponto-fixo será feita, assim como a necessidade de se estabelecer uma função de iteração eficiente, de modo que o método não divirja.
- Definição de critérios de paradas, sendo estes por meio de fórmulas ou pelo critério da repetição das casas decimais.
- Equações de diversos tipos a serem resolvidas analiticamente quando possível e na sequência numericamente para que os resultados sejam comparados.
- Aplicação em calculadoras científicas do método.
- Aplicação em planilhas eletrônicas.

Público Alvo: Alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Duração: 6 aulas de 50 minutos cada.

Recursos: Serão usados lousa, giz, calculadoras científicas, computadores (com planilhas eletrônicas instaladas) e o caderno do aluno.

Metodologia: Primeiramente o método é introduzido, bem como os critérios de convergência. Feito isso, os alunos trabalharão em duplas, buscando sempre colocar aquele aluno com maior facilidade com aquele com uma maior dificuldade para compreensão de conteúdo.

Primeiramente, os alunos resolverão algumas equações polinomiais, exponenciais, trigonométricas e logarítmicas analiticamente. Posteriormente, essas mesmas equações serão sugeridas para que os alunos resolvam de maneira numérica, para que eles possam comparar os resultados, partindo de um valor próximo a solução real. É interessante o aluno conhecer o comportamento das funções que modelam tais equações, então, antes de qualquer coisa, será sugerido ao aluno criar um esboço das funções trabalhadas para terem uma noção de onde começar a buscar pelas soluções.

Seguindo isso, serão instruídos a aplicação do método estudado em uma calculadora cientifica e por fim em planilhas eletrônicas.

Avaliação: O aluno será avaliado diariamente por meio das atividades propostas, trabalhos e uma avaliação escrita.

6.2 Modelo de atividade

1. Encontre as solução da equação $x^2-6x+8=0$ por meio da fórmula de Bhaskara.

2. Esboce o gráfico da função $f(x)=x^2-6x+8$.

3. Aplique o método do ponto fixo para encontrar as duas raízes da equação $x^2-6x+8=0$ (determine a fórmula iterativa e dê um valor para x_0, use $\varepsilon=0,001$).

4. Compare o resultado analítico com o numérico e determine qual é a diferença entre os resultados obtidos.

5. Aplique o método do ponto fixo em uma calculadora cientifica e encontre uma solução para a equação $x^2-6x+8=0$ com 3 casas decimais.

6. Em uma planilha eletrônica, aplique o método do ponto fixo e determine a solução positiva da equação $x^2-6x+8=0$.

7. Resolva usando o método do ponto fixo a equação $e^x-5x=0$.

8. Resolva usando o método do ponto fixo a equação $x^3+2x^2-5x-1=0$.

CAPÍTULO

7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pudemos observar que resolver equações não lineares não é uma tarefa fácil.

As técnicas analíticas resolvem uma grande quantidade de equações, mas é preciso certa prática com as manipulações algébricas. Especialmente, precisamos ficar atentos quanto ao domínio das funções envolvidas para determinar corretamente as condições de existência da solução.

Os métodos numéricos encontram as soluções de forma aproximada, porém com bastante precisão. O conhecimento das características de cada método como aplicabilidade, vantagens, desvantagens, condições para convergência e ordem de convergência, nos permitem escolher o método mais adequado para cada situação.

O Método de Newton é o mais famoso e o que possui mais alta ordem de convergência, porém requer o cálculo da derivada da função. Por outro lado, o Método do Ponto Fixo é bem simples principalmente por não requerer cálculo de derivada, porém sofre com o problema de encontrar um processo iterativo convergente e possui ordem de convergência linear. Já o Método das Secantes possui ordem de convergência intermediária aos dois métodos anteriores e não requer cálculo de derivada. Também estudamos o Método da Bissecção por ser bastante intuitivo e de fácil aplicação, apresenta como desvantagem o fato de ter de tomar um intervalo inicial especial.

Quanto aos recursos computacionais, a calculadora pode ser usada não só para realizar os cálculos, mas também para automatizar o procedimento. Uma grande desvantagem é que não armazena os valores da sequência de aproximação para a solução, é preciso anotar ao longo de sua utilização. Entre os métodos numéricos, conseguimos automatizar na calculadora apenas os métodos de Newton e do Ponto Fixo. O das Secantes não foi possível por necessitar do armazenamento das duas últimas soluções e da Bissecção não foi possível por requerer uma escolha para a redução do intervalo em cada passo.

O Excel (ou qualquer outra planilha eletrônica) se mostrou bastante interessante. Está presente na maioria dos laboratórios de informática das escolas e universidades. É de fácil uso, armazena a sequência de valores obtidos, os arquivos podem ser salvos e acessados sempre que necessário, além de possuir diversas funções matemáticas programadas e poder traçar gráficos. Os quatro métodos numéricos estudados foram implementados no Excel com sucesso.

Por último, o Maxima calcula diretamente as raízes das equações por meio de comandos na tela principal ou em janelas para inserir a função (no caso do wxMaxima). Possui uma sintaxe própria que não é tão trivial ao primeiro contato. Como limitação, observamos que no caso das equações trigonométricas com infinitas soluções, o software mostra apenas uma delas.

Como propostas futuras para continuidade deste estudo, destacamos 1) estudar o software Maxima de forma mais detalhada, tentando contornar a limitação observada; 2) programar os métodos numéricos em uma linguagem de programação, em R ou mesmo no Maxima; 2) desenvolver mais sequências didáticas para alunos do Ensino Médio, abordando técnicas analíticas, um dos métodos numéricos e um recurso computacional, e explorar diversos exemplos com um crescente grau de dificuldade.

REFERÊNCIAS

ARENALES, S.; DAREZZO, A. **Cálculo Numérico: aprendizagem com apoio de software**. São Paulo: Thomson Learning, 2008. Citado nas páginas 62, 63 e 71.

BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática**. São Paulo: Modernal, 2010. v. 1. Citado na página 28.

BURDEN, R.; FAIRES, J. **Análise Numérica**. São Paulo: Prentice-Hall, 2006. Citado nas páginas 66 e 70.

CARMO, M.; MORGADO, A.; WAGNER, E. **Trigonometria e Números Complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. Citado na página 36.

CORNELIO, T. P.; PRADO, D. L. d. **Teorema Fundamental da Álgebra**. Dissertação (Mestrado) — UNICAMP, 2006. Citado na página 44.

DANTE, L. R. **Matemática, contextos e aplicações**. 2. ed. [S.l.]: Ática, 2013. v. 1. Citado nas páginas 38, 39 e 41.

FRANCO, N. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Prentice-Hall, 2006. Citado nas páginas 60, 66 e 70.

GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. **Recursos Computacionais no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Citado nas páginas 22 e 73.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e equações algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado na página 21.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar: logaritmo**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 2. Citado na página 39.

____. **Fundamentos de Matemática Elementar: trigonometria**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 3. Citado na página 45.

____. **Fundamentos de matemática elementar: complexos, polinômios, equações**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 6. Citado na página 43.

OSTROWSKI, A. M. **Solution of Equations and Systems of Equations**. [S.l.]: Academic Press, 1966. Citado na página 69.

PASSOS, L. N. T. **Soluções analíticas e numéricas de equações polinomiais**. Dissertação (Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -Profmat)) — Universidade de São Paulo, 2017. Citado na página 45.

THOMAS, G. B.; FINNEY, R. L.; WEIR, M. D.; GIORDANO, F. R. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002. v. 1. Citado nas páginas 23, 32, 38 e 41.

ANEXO

A

FUNÇÕES NO WXMAXIMA

Funções trigonométricas

Abaixo algumas funções e como são reconhecidas pelo WxMaxima

- Função: $acos(x)$ - Arco Cosseno.
- Função: $acosh(x)$ - Arco Cosseno Hiperbólico.
- Função: $acot(x)$ - Arco Cotangente.
- Função: $acoth(x)$ - Arco Cotangente Hiperbólico.
- Função: $acsc(x)$ - Arco Cossecante.
- Função: $acsch(x)$ - Arco Cossecante Hiperbólico.
- Função: $asec(x)$ - Arco Secante.
- Função: $asech(x)$ - Arco Secante Hiperbólico.
- Função: $asin(x)$ - Arco Seno.
- Função: $asinh(x)$ - Arco Seno Hiperbólico.
- Função: $atan(x)$ - Arco Tangente.
- Função: $atanh(x)$ - Arco tangente Hiperbólico.

  O pacote $atrig1$ contém muitas regras adicionais de simplificação para funções trigonométricas inversas. Junto com regras já conhecidas para Maxima, os seguintes ângulos estão completamente implementados: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$,$\frac{\pi}{3}$, e $\frac{\pi}{2}$. Os ângulos correspondentes nos outros três quadrantes estão também disponíveis. Faça load($atrig1$); para usá-lo.

- Função: $cos(x)$ - Cosseno.
- Função: $cosh(x)$ - Cosseno hiperbólico.
- Função: $cot(x)$ - Cotangente.
- Função: $coth(x)$ - Cotangente hiyperbólica.
- Função: $csc(x)$ - Cossecante.
- Função: $csch(x)$ - Cossecante hiperbólica.

  Variável de opção: halfangles

  Default value: false

  Quando halfangles for verdadeira, meios-ângulos são simplificados imediatamente.

  Pacote: "ntrig"

  O pacote "ntrig" contém um conjunto de regras de simplificação que são usadas para simplificar função trigonométrica cujos argumentos estão na forma $f(\frac{n\pi}{10})$ onde f é qualquer das funções sin, cos, tan, csc, sec e cot.

- Função: $sec(x)$ - Secante.
- Função: $sech(x)$ - Secante hiperbólica.
- Função: $sin(x)$ - Seno.
- Função: $sinh(x)$ - Seno hiperbólico.
- Função: $tan(x)$ - Tangente.
- Função: $tanh(x)$ - Tangente hiperbólica.

Logaritmos

- Função: $log(x)$

Representa o logaritmo natural (base e) de x.

O Maxima não possui uma função interna para logaritmo de base 10 ou de outras bases. $log_{10}(x) := \dfrac{log(x)}{log(10)}$ é uma definição útil.

ICMC USP
SÃO CARLOS